MIRCEA GANGA

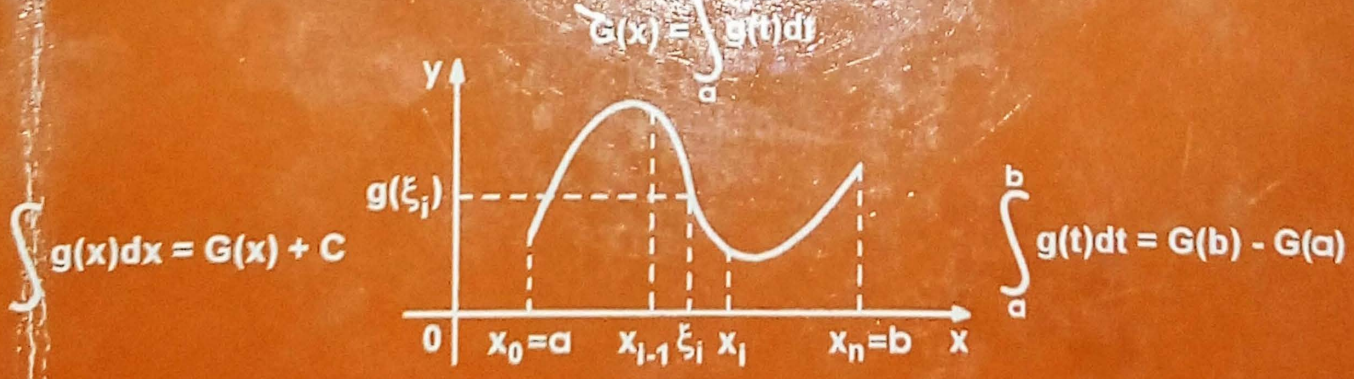
MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA a XII - a

PROFIL M1

VOLUMUL I

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ



EDITURA MATHPRESS

Acest manual este aprobat de Ministerul Educației și Cercetării prin Ordinul 3920/31-05-2004.

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII - a

Destinat elevilor din clasele în care matematica se studiază 3 sau 4 ore săptămânal.

Volumul I

ELEMENTE DE ANALIZA MATEMATICA

PROFILUL M1

Filiera teoretică	* Matematică-informatică * Științe ale naturii
Filiera tehnologică	* Electronică și automatizări * Electrotehnic * Telecomunicații * Mecanic * Textile * Pielărie * Lucrări publice și construcții
Filiera vocațională	* Militar (M.Ap.N., M.I.) Matematică-informatică

EDITURA MATHPRESS

2005

Titlul: MATEMATICĂ - Manual pentru clasa a XII-a (M1)
ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Redactor: prof. MIRCEA GANGA

Tehnoredactare computerizată: ing. MIHAELA ZBARCEA

Referenți:

conf. univ. dr. SORIN DĂSCĂLESCU - UNIVERSITATEA BUCUREŞTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ

prof. gr. I AGNOLA TIBERIU - COLEGIUL NAȚIONAL "GH.LAZĂR" SIBIU

prof. gr. I MÂRŞANU GABRIEL - COLEGIUL DE INFORMATICĂ IAŞI

prof. gr. I NEDELCU ION - COLEGIUL NAȚIONAL "MIHAI VITEAZUL" PLOIEŞTI

prof. gr. I SIMION RADU - COLEGIUL NAȚIONAL "MIHAI VITEAZUL" PLOIEŞTI

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
GANGA, MIRCEA
Manual de matematică: clasa a XII-a / Mircea Ganga
Ploiești: Mathpress, 2003
vol. ; cm.
ISBN 973-85055-9-3
Vol. 1: Elemente de analiză matematică. - 2003 -
p. Bibliogr. - ISBN 973-8222-00-1
51(075.35)

Toate drepturile asupra acestei cărți aparțin EDITURII MATHPRESS.
Nici o parte din acest volum nu poate fi copiată fără permisiunea scrisă a EDITURII MATHPRESS.

Copyright © 2003 MATHPRESS

EDITURA MATHPRESS PLOIEŞTI
Tel.Fax: 0244/592 118; Mobil: 0722/745 965

I. PRIMITIVE

„... la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon *Cours d'analyse...*"
(Cauchy, Leçons, 1829)

„Les élémens de calcul différential que M. Euler publia il y a quelques années, faisoient désirer depuis longtemps le calcul intégral qui devoit en être la suite ..."
(Journal des Sçavans, 1769)

1.1. NOŢIUNI PRELIMINARII

În orice curs de Analiză matematică acest capitol urmează celui care se referă la Derivate. Este deci util să fie bine cunoscut acest din urmă capitol şi evident celelalte capitole ce preced capitolul Derivate.
Semnalăm, aici, cititorului o practică des utilizată în rândul matematicienilor, care se referă la anumite expresii ca: este evident, se vede uşor, se ştie că, se găseşte uşor, este bine cunoscut etc. şi care pentru cititorul obişnuit trebuie să însemne: reflectează.
Noţiunea de primitivă leagă între ele cele două concepte fundamentale ale Analizei matematice, derivata şi integrala.
Integrarea este considerată ca operaţie inversă (într-un anume sens) **a derivării**. Propunem în continuare câteva exemple de operaţii inverse pentru a ilustra unele caracteristici ale acestora.

Exemplul 1. Fiind date două numere reale oarecare a, b, atunci se poate calcula suma lor $s = a + b$.
Invers, se pot determina perechile de numere $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ cu suma s cunoscută.
Există o infinitate de astfel de cupluri (sunt situate pe o dreaptă de ecuaţie $x + y = s$). Deci în acest caz problema are o infinitate de soluţii.

Exemplul 2. Dat fiind numărul real b, atunci se poate calcula b^2 (pătratul lui b).
Invers, se poate găsi un număr real pozitiv r, al cărui pătrat să fie $c \geq 0$. Deci $r^2 = c$, iar de aici $r = \sqrt{c}$ (rădăcina pătrată a

numărului pozitiv c). Aici dacă $c < 0$, nu există număr real r pentru care $r^2 = c$. Deci problema n-are soluţie. Pentru $c \geq 0$, avem răspuns favorabil (numărul r este unic).

Exemplul 3. Fiind dată o dreaptă d în plan şi $A \notin d$. Prin proiecţia ortogonală a lui A pe d se înţelege punctul $A^* \in d$ astfel încât $AA^* \perp d$. Invers, se poate cerceta dacă există aplicaţia inversă celei descrise. Adică pentru $A^* \in d$, există un punct A din plan pentru care proiecţia lui să fie A^* ? Se constată că există o infinitate de puncte (toate punctele de pe dreapta d', care trece prin A^* şi $d' \perp d$).

Exemplul 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.
Se poate căuta o funcţie reciprocă (inversă) a lui f. Se găseşte funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{1}{27}}}$.

În acest caz problema inversă poate fi dificil de rezolvat. (Verificaţi că g este inversa lui f.)

1.2. INTRODUCEREA NOŢIUNII DE INTEGRALĂ. EXPRIMAREA ARIEI PRINTR-O INTEGRALĂ

Considerăm funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Problema care ne interesează este aceea a determinării ariei delimitate de graficul funcţiei, axa Ox şi dreapta $x = 1$ (conceptul de arie a unei figuri (F) reprezentând un domeniu mărginit şi închis este o problemă delicată, noi mărginindu-ne la a spune că figura (F) are aria S dacă există două şiruri de suprafeţe poligonale $\{P_n\}$, $\{P'_n\}$ conţinute în (F), respectiv conţinând pe (F), ale căror arii să aibă limita comună

$$\lim_n S(P_n) = \lim_n S(P'_n) = S,$$

unde $S(P_n)$ este aria suprafeţei poligonale P_n).
Figura mărginită de graficul funcţiei, axa Ox şi dreapta $x = 1$ se numeşte **triunghi curbiliniu** (fig. 1).
Pentru a calcula aria triunghiului curbiliniu $OA'A$, pe care o notăm cu S, vom împărţi segmentul OA' în n (≥ 2) părţi egale prin punctele $D_0 = O, D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n = A'$, având coordonatele

$D_0(0,0)$, $D_1(\frac{1}{n},0)$, $D_2(\frac{2}{n},0)$, ..., $D_{n-1}(\frac{n-1}{n},0)$, $D_n(1,0)$ şi vom construi două tipuri de dreptunghiuri:

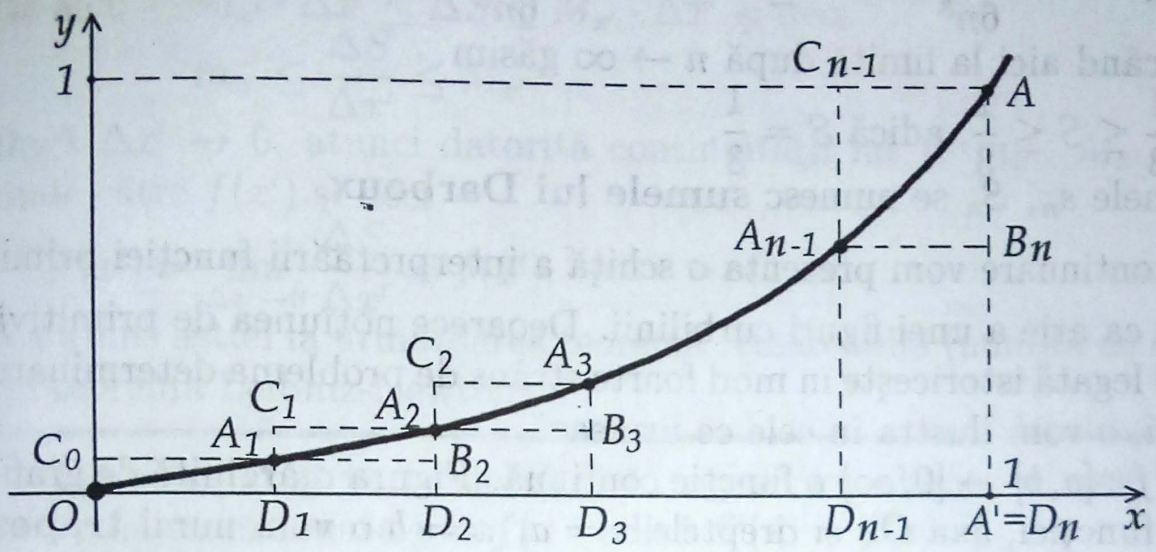


Fig. 1

1) $D_1A_1B_2D_2$, $D_2A_2B_3D_3$, ..., $D_{n-1}A_{n-1}B_nD_n$, care sunt incluse în interiorul triunghiului curbiliniu $OA'A$ şi a căror reuniune este inclusă, de asemenea, în interiorul triunghiului curbiliniu $OA'A$ (toate dreptunghiurile au o latură de lungime $\frac{1}{n}$).

2) $OC_0A_1D_1$, $D_1C_1A_2D_2$, $D_2C_2A_3D_3$, ..., $D_{n-1}C_{n-1}AD_n$, ale căror interioare reunite conţin interiorul triunghiului curbiliniu $OA'A$ (toate dreptunghiurile au o latură de lungime $\frac{1}{n}$).

În aceste condiţii suma s_n a ariilor dreptunghiurilor de tipul 1) vor aproxima aria S a triunghiului curbiliniu prin lipsă, iar suma S_n a ariilor dreptunghiurilor de tipul 2) vor aproxima aceeaşi arie S prin adaos. Deci $s_n \leq S \leq S_n$, $\forall\, n \geq 2$.

Rămâne să calculăm s_n, S_n. Avem

$$s_n = \sigma(D_1A_1B_2D_2) + \sigma(D_2A_2B_3D_3) + \ldots + \sigma(D_{n-1}A_{n-1}B_nD_n) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

(am folosit formula $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$) şi respectiv

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) =$$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$.

Deci $\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leq S \leq \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$, $\forall n \geq 2$.

Trecând aici la limită după $n \to \infty$ găsim

$\dfrac{1}{3} \leq S \leq \dfrac{1}{3}$, adică $S = \dfrac{1}{3}$.

Sumele s_n, S_n se numesc **sumele lui Darboux**.

În continuare vom prezenta o schiţă a interpretăării funcţiei primitive ca arie a unei figuri curbilinii. Deoarece noţiunea de primitivă este legată istoriceşte în mod foarte strâns de problema determinării ariei, o vom ilustra în cele ce urmează.

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ o funcţie continuă. Figura mărginită de graficul funcţiei, axa Ox şi dreptele $x = a$, $x = b$ o vom numi **trapez curbiliniu** (fig. 2)

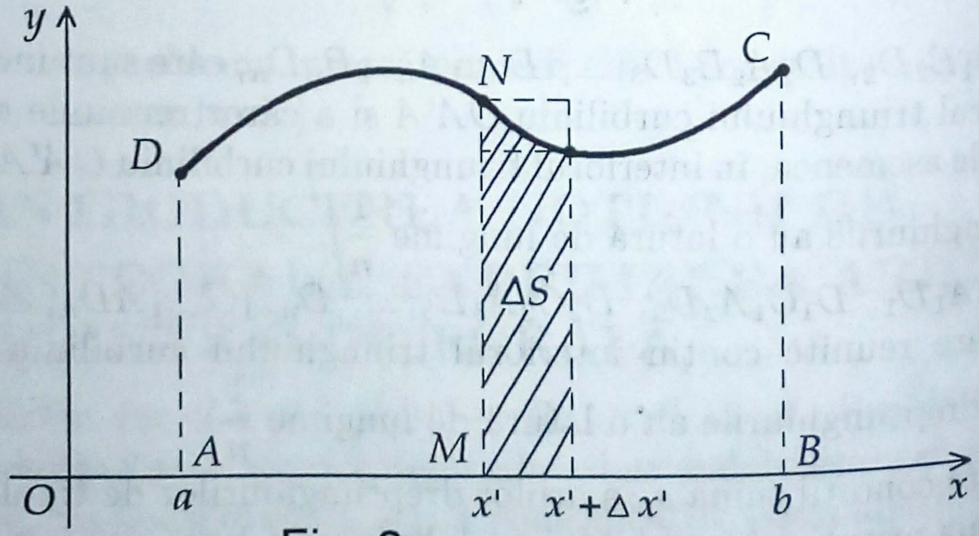


Fig. 2

Studiind aria figurii variabile $AMND$ cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x = a$, $x = x'$ (unde x' este abscisa punctului M situat între A şi B) vom încerca să determinăm mărimea lui S reprezentând aria figurii $ABCD$.

Când x' variază, aria figurii $AMND$ va lua diferite valori, dar de fiecare dată **o valoare** bine precizată, ceea ce arată că aria trapezului curbiliniu $AMND$ este o anumită funcţie de x' definită pe intervalul $[a, b]$, pe care o vom nota cu $S(x')$. Deci $S : [a, b] \to [0, \infty)$. Pentru punctul $x = x' + \Delta x'$ obţinem aria $S(x' + \Delta x')$. Avem

$\Delta S = S(x' + \Delta x') - S(x')$,

care reprezintă creşterea ariei în punctul x' corespunzătoare creşterii $\Delta x'$ a argumentului x'.

Funcţia f fiind continuă pe $[x', x'+\Delta x']$ este mărginită şi îşi atinge marginile pe acest interval. Deci există numere reale $m_{x'}$, $M_{x'}$ pentru care $m_{x'} \leq f(x) \leq M_{x'}$, $\forall\, x \in [x', x'+\Delta x']$.
De aici: $m_{x'} \cdot \Delta x' \leq \Delta S \leq M_{x'} \cdot \Delta x'$ şi deci

$$m_{x'} \leq \frac{\Delta S}{\Delta x'} \leq M_{x'}.$$

Dacă $\Delta x' \to 0$, atunci datorită continuităţii lui f, $m_{x'}$, $M_{x'}$ vor tinde către $f(x')$ şi deci

$$S'(x') = \lim_{\Delta x' \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x'} = f(x').$$

S-a ajuns astfel la următoarea teoremă remarcabilă (numită de obicei teorema Leibniz-Newton):

> Derivata ariei variabile $S(x)$ în raport cu abscisa x este egală cu ordonata $y = f(x)$, adică $S'(x) = f(x)$.

Această funcţie primitivă S (S este o primitivă a lui f dacă: 1) S **derivabilă** pe $[a,b]$; 2) $S'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$) se distinge dintre toate celelalte funcţii primitive prin faptul că devine egală cu zero când $x = a$. De aceea, dacă se cunoaşte o primitivă F oarecare a lui f şi dacă

$S(x) = F(x) + k$, k =constantă,

atunci k se determină din cerinţa $S(a) = 0$ când

$S(a) = F(a) + k$ şi de aici $k = -F(a)$.

Aşadar $S(x) = F(x) - F(a)$.
În particular, pentru a găsi aria S a întregului trapez $ABCD$ trebuie ca $x = b$, când avem: $S = F(b) - F(a)$.

Se notează $S(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (citim: integrală definită de la a la x din f). Din cele spuse mai sus $S'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$. Atunci aria trapezului curbiliniu $ABCD$ este egală cu

$$S = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a funcţiei f pe $[a,b]$ (unde F are proprietăţile:
1) F derivabilă pe $[a,b]$ şi 2) $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$).

1.3. PRIMITIVA UNEI FUNCŢII. INTEGRALA NEDEFINITĂ A UNEI FUNCŢII CONTINUE.

Fie $g : I \to \mathbb{R}$, I interval. Ne propunem să determinăm o funcţie derivabilă $G : I \to \mathbb{R}$, care să aibă proprietatea că în fiecare punct al intervalului I derivata ei să fie $G'(x) = g(x)$, $\forall\, x \in I$. Funcţia G se numeşte **funcţie primitivă** a funcţiei g pe intervalul I.
Problema determinării **primitivei** unei funcţii date conţine alte trei probleme:
a) **O problemă de existenţă.** Trebuie să arătăm că problema pusă nu este fără obiect, adică astfel de funcţii G există.
b) **Gradul de generalitate al soluţiei.** Trebuie cercetat, în cazul când există, dacă soluţia este unică sau sunt mai multe soluţii; în cazul când soluţia nu este unică să găsim forma ei generală.
c) **Determinarea funcţiei** G. Trebuie să stabilim metodele pentru determinarea funcţiei G a cărei derivată este g.
Pentru punctul b) răspundem acum. Să presupunem că există funcţii G şi fie G_1, G_2 două primitive. Avem $G_1'(x) = G_2'(x) = g(x)$, $\forall\, x \in I$. De aici $(G_1 - G_2)'(x) = 0$, $\forall\, x \in I$. Atunci (o consecinţă a teoremei lui Lagrange) $G_1(x) - G_2(x) = C$, $\forall\, x \in I$, unde C este o constantă arbitrară.
Aşadar am obţinut rezultatul următor:

> Dacă există o primitivă G, atunci există o infinitate care diferă de G printr-o constantă arbitrară.

Toate primitivele se obţin dintr-una (din G) printr-o deplasare paralelă cu axa Oy (fig. 3), deci soluţia generală (dacă există) este formată dintr-o **familie de curbe paralele**, numite astfel deoarece tangentele la curbele din familie în punctele de intersecţie cu o paralelă la axa Oy, $x = x_0$ sunt paralele, $\operatorname{tg}\theta = [G(x) + C]'_{x=x_0} = g(x_0)$
S-a văzut la capitolul Derivate că dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie cunoscută (dată) derivabilă pe I, atunci $f' : I \to \mathbb{R}$ se poate calcula (afla) şi se numeşte funcţia derivată a lui f.
Este posibil să inversăm această problemă în sensul schimbării rolurilor funcţiilor cunoscute (date) şi calculate (aflate).
Într-adevăr dacă se consideră o funcţie $g : I \to \mathbb{R}$ cunoscută ca o derivată, atunci să se găsească (afle, determine) o funcţie $G : I \to \mathbb{R}$ derivabilă cu proprietatea $G' = g$.

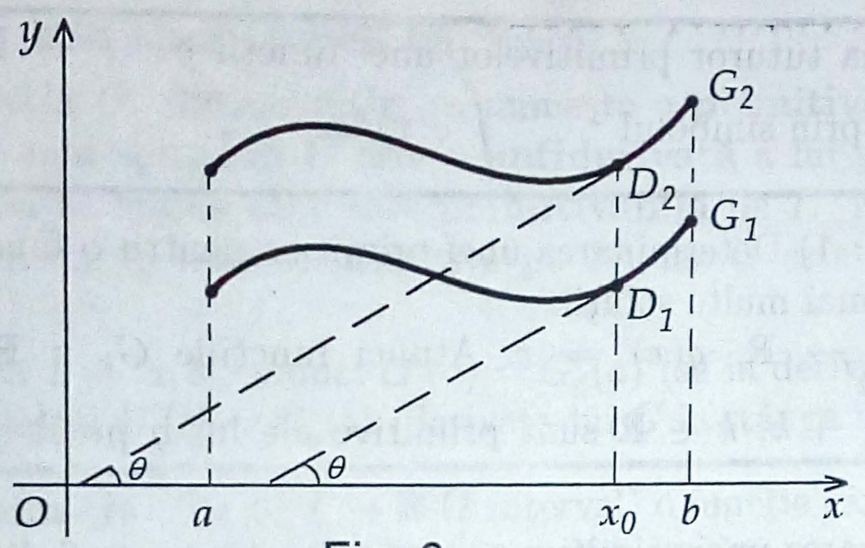


Fig. 3

O astfel de funcţie G se numeşte **primitivă (antiderivată)** a lui g pe I. De obicei I este interval din $\mathbb{R}$.

Procedeul (operaţia) prin care se determină primitivele unei funcţii se numeşte **integrare (antiderivare)**.

A cunoaşte o funcţie ca derivată revine la a cunoaşte „o primitivă" a funcţiei. Într-adevăr fie

1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ (funcţia dată), pentru care $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2$ (funcţia aflată);

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - \sin x$, pentru care $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g'(x) = -\cos x$;

3) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$, pentru care $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Atunci „o primitivă" pentru

1′) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ (funcţia dată), este $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = x^3$ (funcţia aflată);

2′) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\cos x$ este $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = 1 - \sin x$;

3′) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, este $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \operatorname{arctg} x$.

Utilizarea articolului nehotărât în exprimarea „o primitivă" a lui g nu este o neglijenţă gramaticală, ci vine să atragă atenţia că este vorba de o primitivă a lui g din mai multe posibile. De exemplu pentru funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, funcţiile $G_1, G_2, G_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G_1(x) = \dfrac{x^3}{3}$, $G_2(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$, $G_3(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1$ sunt trei primitive ale lui g.

Mulţimea tuturor primitivelor unei funcţii $g : I \to \mathbb{R}$ se notează prin simbolul $\int g(x)\mathrm{d}x$.

Observaţii: 1) Determinarea unei primitive pentru o funcţie dată poate avea mai multe soluţii.

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Atunci funcţiile $G_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G_k(x) = \frac{x^2}{2} + k$, $k \in \mathbb{R}$ sunt primitive ale lui g pe $\mathbb{R}$ şi sunt o infinitate.

2) Determinarea unei primitive pentru o funcţie poate fi dificilă sau foarte dificilă (**în orice caz operaţia de integrare este de cele mai multe ori mai dificilă decât cea de derivare**). De exemplu pentru $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{\cos x}$, avem $G : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $G(x) = \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ este o primitivă a lui g pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, care nu este uşor de găsit dacă nu se cunoaşte forma lui G.

3) Determinarea unei primitive poate fi o problemă fără soluţie. Cele mai multe funcţii pe care le analizăm sunt funcţii continue, care vom vedea mai târziu, sunt funcţii care admit primitive (pe domeniul de continuitate). Existenţa unei primitive nu garantează exprimarea ei cu ajutorul funcţiilor uzuale (polinomiale, raţionale, radical, exponenţială, logaritmică, trigonometrice (directe şi inverse) etc.).

Aşa sunt funcţiile continue: $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = \cos x^2$, $g_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_3(x) = e^{-x^2}$, $g_4 : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g_4(x) = \frac{1}{\ln x}$.

Cu aceste elemente putem defini riguros noţiunea de primitivă a unei funcţii:

Definiţie. Fie $g : I \to \mathbb{R}$, I interval. Funcţia g **admite primitive pe** I (se mai spune că g este **antiderivabilă pe** I) dacă există $G : I \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

1) G este **derivabilă** pe I;

2) $G'(x) = g(x)$, $\forall\, x \in I$.

Observaţii: 1) Întotdeauna **trebuie precizată** mulţimea pe care

funcţia dată admite primitive.

2) Funcţia G, din definiţie, se numeşte o **primitivă** a lui g (sau încă se mai spune că G este o **antiderivată** a lui g pe I). Dacă G există se spune că g este **primitivabilă** pe I. Noi vom folosi exprimarea „g admite primitive pe I“, iar G este o primitivă a lui g.

3) Dacă $I = [a, b]$, atunci $G'(a) = G'_d(a)$ (se ia derivata la dreapta în $x = a$) şi $G'(b) = G'_s(b)$ (derivata lui G la stânga în $x = b$).

Definiţie. Fie $g : I \to \mathbb{R}$ (I interval) o funcţie care admite primitive pe I. Mulţimea primitivelor lui g se numeşte **integrala nedefinită** a lui g şi se notează prin

$$\int g(x)\mathrm{d}x = \{G : I \to \mathbb{R};\ G = \text{ primitivă a lui } g\}$$

Observaţie. Să reţinem că **integrala nedefinită este o mulţime infinită de funcţii.**

1.4. PROPRIETĂŢI GENERALE

P1. Fie $g : I \to \mathbb{R}$, I interval. Dacă $G_1,\ G_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale lui g (pe I), atunci $G_1(x) - G_2(x) = c$, $\forall\, x \in I$, $c =$ număr real.

Demonstraţie. Din ipoteză G_1, G_2 sunt derivabile pe I şi $G'_1(x) = G'_2(x) = g(x)$, $\forall\, x \in I$. De aici $(G_1 - G_2)'(x) = 0$, $\forall\, x \in I$. Atunci se ştie (o consecinţă a teoremei lui Lagrange) că există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $G_1(x) - G_2(x) = c$, $\forall\, x \in I$.

Observaţii: 1) Deci două primitive ale aceleiaşi funcţii **definită pe un interval** diferă printr-o constantă.

2) Dacă se extinde definiţia primitivelor pentru funcţii definite pe reuniune de intervale, atunci afirmaţia nu mai este adevărată. Într-adevăr, fie $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Atunci funcţiile

$$G_1, G_2 : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ G_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 1, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - 1, & x > 0 \end{cases},\ G_2(x) = \frac{x^2}{2} \text{ sunt}$$

primitive pentru g pe $\mathbb{R} - \{0\}$, dar $G_1(x) - G_2(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0, \end{cases}$

care evident nu este o funcţie constantă pe $\mathbb{R} - \{0\}$.

3) Dacă se adaugă o constantă c la o primitivă G a lui g pe I, atunci se obţine $G + c$, care este tot o primitivă a lui g pe I. Deci mulţimea tuturor primitivelor lui g este

$$\boxed{\int g(x)\mathrm{d}x = G + \mathcal{C}}$$

unde G este o primitivă a lui g, iar

$\mathcal{C} = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ constantă}\}$ este mulţimea tuturor funcţiilor constante.

Vom adopta scrierea $\int g(x)\mathrm{d}x = G(x) + \mathcal{C}$.

4) Dacă $x_0 \in I$ este un punct oarecare, $y_0 \in \mathbb{R}$ şi $g : I \to \mathbb{R}$ are primitive, atunci există o unică primitivă $G : I \to \mathbb{R}$ cu $G(x_0) = y_0$. Într-adevăr dacă $H : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui g, atunci o altă primitivă $G : I \to \mathbb{R}$ a lui g este $G = H + c$. Cum $G(x_0) = y_0$ se obţine $c = y_0 - H(x_0)$.

P2. (Operaţii algebrice cu funcţii care admit primitive) Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ (I interval) două funcţii care admit primitive pe I şi $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Atunci:

1) $f + g$ admite primitive pe I şi

$$\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

(**integrala sumei este egală cu suma integralelor**);

2) αf admite primitive pe I şi $\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x$

(**constanta iese de sub integrală**)

3) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \mathrm{C} = F(x) + \mathcal{C}$ unde $\mathcal{C} = \{h : I \to \mathbb{R};$ h constantă$\}$ iar F este o primitivă a lui f pe I.

Demonstraţie. 1) Fie $F, G : I \to \mathbb{R}$ primitive pentru f şi respectiv g pe I. Atunci este clar că $F + G$ este derivabilă pe I (ca sumă de funcţii derivabile) şi $(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, $x \in I$, ceea ce arată că $F + G$ este o primitivă pentru $f + g$.

Să demonstrăm în continuare egalitatea de mulţimi. Pentru aceasta folosim dubla incluziune.

„$\subset$“. Fie $H \in \int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$. Deci $H : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe

I şi $H'(x) = f(x) + g(x)$, $x \in I$. Cum f are primitive (pe I) rezultă $\int f(x)\mathrm{d}x \neq \emptyset$ şi deci există $F \in \int f(x)\mathrm{d}x$, $F : I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe I şi $F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

Fie $G = H - F$. Evident G este derivabilă pe I şi $G' = H' - F' = f + g - f = g$. Deci $G \in \int g(x)\mathrm{d}x$. Prin urmare $H = G + F$, cu $G \in \int g(x)\mathrm{d}x$ şi $F \in \int f(x)\mathrm{d}x$, adică $H \in \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

Cum H a fost ales arbitrar rezultă

$$\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x \subset \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x, \qquad (1).$$

„$\supset$ “. Fie acum $H \in \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

Aici dacă $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$, atunci

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \overset{\text{def.}}{=} \{f + g;\ f \in \mathcal{A},\ g \in \mathcal{B}\}.$$

Deci există $F \in \int f(x)\mathrm{d}x$, $G \in \int g(x)\mathrm{d}x$ astfel încât $H = F + G$. Evident H este derivabilă pe I şi $H' = F' + G' = f + g$, ceea ce arată că $H \in \int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$.

Cum H a fost ales arbitrar se obţine

$$\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x \subset \int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x, \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă egalitatea cerută.

Analog se procedează pentru 2) şi 3). ■

Observaţie. Dacă $f_i : I \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ sunt funcţii care admit primitive, şi $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,n}$, atunci:

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\mathrm{d}x.$$

Tabel de integrale nedefinite

Nr.crt.	FUNCŢIA	INTEGRALA NEDEFINITĂ
1	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ (funcţia putere cu exponent natural)	$\int x^n\mathrm{d}x=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
2	$g:I\to\mathbb{R}$, $I\subset(0,\infty)$, $g(x)=x^a$, $a\in\mathbb{R}-\{-1\}$ (funcţia putere cu exponent real diferit de -1)	$\int x^a\mathrm{d}x=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C$
3	$g:I\to\mathbb{R}$, $I\subset(0,\infty)$ sau $I\subset(-\infty,0)$, $g(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\lvert x\rvert+C=$ $=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}+C$
4	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq1$ (funcţia exponenţială de bază a). Dacă $a=e$, atunci $g(x)=e^x$	$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ $\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$
5	$g:I\to\mathbb{R}$, $I=(-\infty,-a)$ sau $I=(-a,a)$, $a>0$ sau $I=(a,\infty)$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
6	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}$, $a\neq0$	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}+C$
7	$g:I\to\mathbb{R}$, $I\subset(-a,a)$, $a\neq0$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$
8	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $a\neq0$	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=$ $=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$
9	$g:I\to\mathbb{R}$, $I\subset(-\infty,-a)$, $I\subset(a,\infty)$, $a>0$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=$ $=\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert+C$

Nr.crt.	FUNCŢIA	INTEGRALA NEDEFINITĂ
10	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\sin x$	$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$
11	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\cos x$	$\int \cos x\,dx=\sin x+C$
12	$g:I\to\mathbb{R}$, $I\subseteq\left((2k+1)\frac{\pi}{2},(2k+3)\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $g(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$
13	$g:I\to\mathbb{R}$, $I\subseteq(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, $g(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$
14	$g:I\to\mathbb{R}$, $I\subseteq\left((2k+1)\frac{\pi}{2},(2k+3)\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $g(x)=\operatorname{tg}x$	$\int \operatorname{tg}x\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$
15	$g:I\to\mathbb{R}$, $I\subseteq(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ $g(x)=\operatorname{ctg}x$	$\int \operatorname{ctg}x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$
16	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\operatorname{sh}x$ (funcţia sinus hiperbolic)	$\int \operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C$
17	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\operatorname{ch}x$, (funcţia cosinus hiperbolic)	$\int \operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C$

Observaţie. Probaţi că funcţia G, care apare în integrala nedefinită, este primitivă pentru g, verificând egalitatea $G'=g$.

Exerciţii rezolvate

Să se calculeze integralele următoare:

1) $\mathcal{I}=\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx,\ x<0.$

R. Avem $\mathcal{I}=\int x^2\mathrm{d}x+\int 2x\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{x^3}{3}+x^2+\ln(-x)+C$. □

2) $\mathcal{I}=\int\frac{x-3}{x^5}\mathrm{d}x,\ x>0.$

R. Avem: $\mathcal{I}=\int\left(\frac{x}{x^5}-\frac{3}{x^5}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4}-3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5}=\int x^{-4}\mathrm{d}x-$
$-3\int x^{-5}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3x^3}+\frac{3}{4x^4}+C$. □

3) $\mathcal{I}=\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})\mathrm{d}x,\ x\geq 0.$

R. Se obţine:

$$\mathcal{I}=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x+\int x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+C=$$
$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C.\ \square$$

4) $\mathcal{I}=\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x,\ x>0.$

R. Se obţine

$$\mathcal{I}=\int(2x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{3}})\mathrm{d}x=2\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-3\int x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-$$
$$3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=4x^{\frac{1}{2}}-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+C=4\sqrt{x}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.\ \square$$

5) $\mathcal{I}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}.$

R. Se scrie $\mathcal{I}$ sub forma

$$\mathcal{I}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)+C.\ \square$$

6) $\mathcal{I}=\int\frac{\mathrm{d}x}{9x^2-4},\ x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$

R. Avem: $\mathcal{I}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{9\left[x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]}=\dfrac{1}{9}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=$

$=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{2\cdot\frac{2}{3}}\ln\left|\dfrac{x-\frac{2}{3}}{x+\frac{2}{3}}\right|+C=\dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{3x-2}{3x+2}\right|+C=\dfrac{1}{12}\ln\left(\dfrac{2-3x}{3x+2}\right)+C.\square$

7) $\mathcal{I}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-9x^2}},\ x\in\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right).$

R. Se scrie $\mathcal{I}$ astfel:

$$\mathcal{I}=\int\frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{4}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+C.\ \square$$

8) $I=\int\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right).$

R. Avem:

$$\mathcal{I}=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=-\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x+C.\ \square$$

9) $\mathcal{I}=\int\left(\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x,\ x\in(-1,1).$

R. Avem:

$$\mathcal{I}=\int\frac{2\mathrm{d}x}{1+x^2}-\int\frac{3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=2\mathrm{arctg}x-3\arcsin x+C.\ \square$$

10) $\mathcal{I}=\int(2e^x-3^x)\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}.$

R. Se obţine: $\mathcal{I}=2\int e^x\mathrm{d}x-\int 3^x\mathrm{d}x=2e^x-\dfrac{3^x}{\ln 3}+C.\ \square$

11) $\mathcal{I}=\int\dfrac{(x^2-1)^2}{x^4}\mathrm{d}x,\ x>0.$

R. Găsim:

$$\mathcal{I}=\int\frac{x^4-2x^2+1}{x^4}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+$$

$$+\int\frac{dx}{x^4}=x-2\int x^{-2}dx+\int x^{-4}dx=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C.\ \square$$

12) $\mathcal{I}=\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx,\ x\in\mathbb{R}.$

R. Avem: $\mathcal{I}=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=$

$$=\int(1-\sin x)dx=\int dx-\int\sin xdx=x+\cos x+C.\ \square$$

13) $\mathcal{I}=\int\frac{1-\sin^3x}{\sin^2x}dx,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$

R. Se obţine:

$$\mathcal{I}=\int\left(\frac{1}{\sin^2x}-\sin x\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2x}-\int\sin xdx=$$
$$=-\mathrm{ctg}x+\cos x+C.\ \square$$

14) $\mathcal{I}=\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx,\ x\in(-1,1).$

R. Găsim: $\mathcal{I}=\int\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\right)dx=-\int\frac{dx}{x^2-1}-$

$$-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\arcsin x+C=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)-$$
$$-\arcsin x+C.\ \square$$

15) $\mathcal{I}=\int\frac{3+\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}dx,\ x\in\mathbb{R}.$

R. Avem: $\mathcal{I}=\int\left(\frac{3}{x^2+4}+\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}\right)dx=3\int\frac{dx}{x^2+4}+$

$$+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C.\ \square$$

Exerciţii propuse

Să se calculeze integralele:

1) $\int\left(3x^3-5x^2+\frac{3}{x}\right)dx,\ x>0;$ **2)** $\int\left(x-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx,\ x<0;$

3) $\int(x-3\sqrt{x}+\sqrt[5]{x})\,dx,\ x\geq0;$ **4)** $\int!\frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,\ x>0;$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$, $x \in \mathbb{R}$; **6)** $\int \frac{dx}{16x^2-9}$, $x \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$, $x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$; **8)** $\int \left(\frac{3}{4-x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$, $x > 2$;

9) $\int \frac{2x^2+3}{(x^2-1)(x^2+4)} dx$, $x > 1$ $(2x^2+3 = x^2-1+x^2+4)$;

10) $\int (x - 3e^x) dx$, $x \in \mathbb{R}$; **11)** $\int \left(\frac{1}{x} - 2^x + \frac{1}{x^2} - 3^x\right) dx$, $x > 0$;

12) $\int \frac{(x-1)^3}{x^3} dx$, $x < 0$; **13)** $\int \frac{\sqrt{x^2-3}+1}{x^2-3} dx$, $x > \sqrt{3}$;

14) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$, $x \in \mathbb{R}$; **15)** $\int \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x} dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

P3. Fie $g : I \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive pe I. Atunci g are proprietatea lui Darboux.

Demonstraţie. Fie $G : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui g pe I. Atunci G este o funcţie derivabilă pe I şi $G'(x) = g(x)$, $x \in I$. Se ştie că G' are proprietatea lui Darboux pe I (teorema lui Darboux).

Corolar. Dacă $g : I \to \mathbb{R}$ **nu are proprietatea lui Darboux** pe I, atunci g **nu admite primitive pe** I.

Exemplu. Să se arate că $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

R. Spunem că $g : I \to \mathbb{R}$, I interval, are proprietatea lui Darboux pe I, dacă $\forall a, b \in I$, $a < b$ şi $\forall \lambda \in (g(a), g(b))$ (sau $\lambda \in (g(b), g(a))$) atunci există $x_\lambda \in (a, b)$ astfel încât $g(x_\lambda) = \lambda$.

Fie $a = \sqrt{2} < b = \sqrt{5}$. Avem: $g(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g(\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Fie $\lambda = \frac{1}{2} \in \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Să arătăm că nu există $x_\lambda \in (\sqrt{2}, \sqrt{5})$ astfel încât $g(x_\lambda) = \lambda$.

Dacă ar exista $x_\lambda \in (\sqrt{2}, \sqrt{5}) \cap \mathbb{Q}$, atunci $g(x_\lambda) = x_\lambda = \frac{1}{2}$. Dar $\frac{1}{2} \notin (\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

Dacă ar exista $x_\lambda \in (\sqrt{2}, \sqrt{5}) \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, atunci $g(x_\lambda) = \dfrac{1}{x_\lambda} = \dfrac{1}{2}$, ceea ce dă $x_\lambda = 2$, care însă este număr raţional ! Deci g nu are proprietatea lui Darboux şi prin urmare nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

P4. Fie $g : I \to \mathbb{R}$, I interval. Dacă $g(I) = \{g(x);\ x \in I\}$ **nu este interval**, atunci g **nu admite primitive pe** I.

Exemplul 1. Să se arate că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$ (g se numeşte funcţia semn, $g \overset{\text{not}}{=} \operatorname{sgn}$).
R. Cum $g(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\}$ nu este interval, se deduce că g nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

Exemplul 2. Fie P un polinom nenul cu coeficienţi reali, un interval $I \subset \mathbb{R}$, şi o funcţie neconstantă $f : I \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $(P \circ f)(x) = 0$, $\forall\, x \in I$. Să se arate că f nu admite primitive pe I.
R. Fie S mulţimea rădăcinilor reale ale polinomului P. Deoarece $P(f(x)) = 0$, $\forall\, x \in I$ rezultă că $f(I) \subseteq S$, adică $f(I)$ este finită. Cum $f(I)$ nu este interval înseamnă că f nu admite primitive pe I.

P5. Orice funcţie **continuă** $f : I \to \mathbb{R}$ **admite primitive** pe I.

Demonstraţia acestei proprietăţi remarcabile este realizată în capitolul III.

Exemplu. Să se arate că $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0, \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$. Să se determine o astfel de primitivă.
R. Evident g este continuă pe $\mathbb{R}^*$, fiind definită pe $[0, \infty)$ prin intermediul funcţiei exponenţiale (care este continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi pe restricţia $[0, \infty)$), iar pe $(-\infty, 0)$ prin funcţie polinomială (care este continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi pe restricţia $(-\infty, 0)$).
Studiem continuitatea în $x = 0$.
Din $\lim\limits_{x \nearrow 0} g(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow 0}(x + 1) = \lim\limits_{x \searrow 0} e^x = g(0) = 1$, se deduce că g este continuă şi în $x = 0$. Deci g este continuă pe $\mathbb{R}$. Prin urmare g admite primitive pe $\mathbb{R}$. Pentru a calcula o

primitivă $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se calculează pe $[0, \infty)$, $\int e^x \mathrm{d}x$, iar pe $(-\infty, 0)$, $\int (x+1)\mathrm{d}x$.

Avem $G(x) = \begin{cases} e^x + k_1, & x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + x + k_2, & x < 0. \end{cases}$

Legătura între constantele k_1, k_2 se obţine din cerinţa de continuitate în $x = 0$ (G fiind derivabilă în $x = 0$, implică G este continuă în $x = 0$) a funcţiei G.

Avem:

G este continuă în $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow 0} G(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} G(x) = G(0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k_2 = 1 + k_1$. Se poate lua $k_1 = 0$ şi deci $k_2 = 1$. Prin urmare forma finală a unei primitive G pentru g este

$$G(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + x + 1, & x < 0. \end{cases}$$

Din construcţie avem că G este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi $G'(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$. Se verifică simplu că $G'(0) = g(0) = 1$. (De fapt ultima verificare nemaifiind necesară, pentru că g fiind continuă, admite primitive. Deci este necesar să găsim doar relaţia între constantele k_1, k_2).

Observaţie. După cum se observă din acest exemplu, pentru a calcula o primitivă a funcţiei g pe întreaga mulţime $\mathbb{R}$, a trebuit să calculăm primitive ale lui g pe submulţimile $(-\infty, 0)$, $[0, \infty)$ din $\mathbb{R}$ şi apoi să realizăm „lipirea“ lor în punctul $x = 0$ pentru a obţine **o primitivă** G a lui g pe întreaga mulţime $\mathbb{R}$. Legătura între constantele k_1 şi k_2 se realizează din cerinţa de continuitate a lui G în punctul $x = 0$ (dacă ştim că g admite primitive, atunci G este derivabilă şi prin urmare continuă). Verificarea derivabilităţii lui G în punctul de „lipire“ $x = 0$ nu mai este necesară (are loc imediat), aceasta având loc deoarece g fiind continuă pe $\mathbb{R}$, g admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Atragem atenţia că, în acest caz, integrala nedefinită a lui g este

$$\int g(x)\mathrm{d}x = G(x) + C,$$

cu G determinată mai sus.

În general dacă $g : I \to \mathbb{R}$, unde $I = [a, b]$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in [a, x_1] = I_1 \\ g_2(x), & x \in (x_1, x_2] = I_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_k(x), & x \in (x_{k-1}, b] = I_k, \end{cases}$$

este o funcţie continuă pe I, atunci pentru a calcula o primitivă G a lui g se calculează: pe I_1, $\int g_1(x)\mathrm{d}x$; pe I_2, $\int g_2(x)\mathrm{d}x$; ...; pe I_k, $\int g_k(x)\mathrm{d}x$ şi se alege câte o primitivă din mulţimile de mai sus: $G_1 \in \int g_1(x)\mathrm{d}x$, $G_2 \in \int g_2(x)\mathrm{d}x, \ldots, G_k \in \int g_k(x)\mathrm{d}x$, după care „arhitectura“ lui G este:

$$G(x) = \begin{cases} G_1(x) + c_1, & x \in I_1 \\ G_2(x) + c_2, & x \in I_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_k(x) + c_k, & x \in I_k, \end{cases}$$

unde constantele $c_1, c_2, \ldots, c_k$ se determină din condiţia de continuitate a lui G în punctele de „lipire“ $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Uneori se utilizează, în determinarea constantelor, condiţia ca G să fie continuă la capete: $G(a) = \lim\limits_{x \searrow a} G(x)$, $G(b) = \lim\limits_{x \nearrow b} G(x)$.

Facem precizarea că se poate lua constanta c_1 egală cu zero (dacă nu este o altă condiţie pentru G şi punctele din I_1). Acum integrala nedefinită este

$$\boxed{\int g(x)\mathrm{d}x = G(x) + C}$$

cu G precizată mai sus.

Propunem spre rezolvare (să se determine o primitivă pentru următoarele funcţii pe mulţimile de definiţie):

1) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x + 1|$; 2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x - 1|$;

3) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x^2 - 1|$; 4) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |\sin x|$;

5) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

P6. Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$. Dacă g admite primitive pe $[a, c]$, $[c, b]$, atunci g admite primitive pe $[a, b]$.

Demonstraţie. A se vedea problema 4 de la probleme rezolvate.

P7. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, admite primitive pe I, atunci funcţia obţinută din aceasta prin modificarea valorii într-un punct din I nu mai admite primitive pe I.

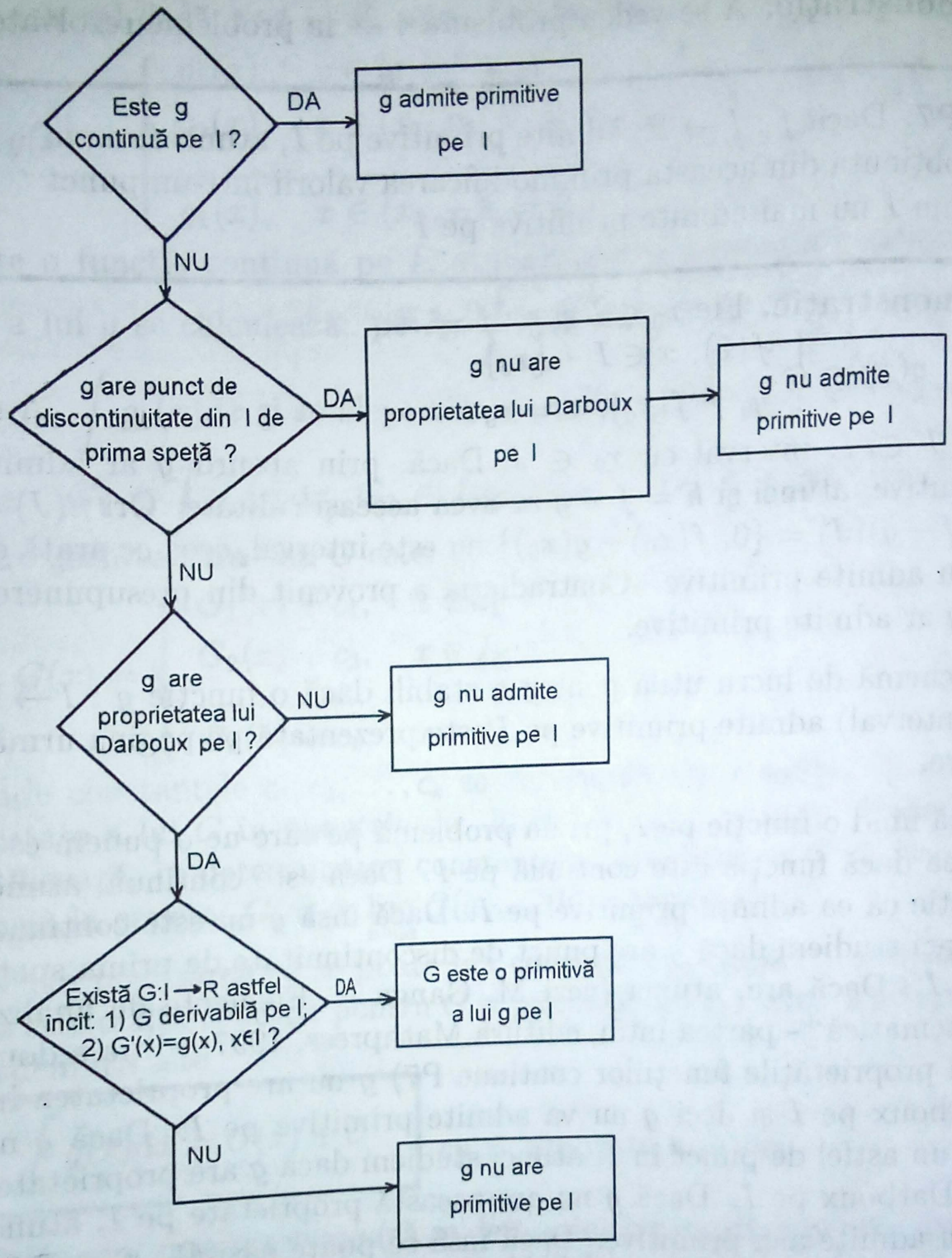
Demonstraţie. Fie $x_0 \in I$ şi $g : I \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in I - \{x_0\} \\ y_0 \neq f(x_0), & x = x_0 \,. \end{cases}$$

Fie $J \subset I$, interval cu $x_0 \in J$. Dacă, prin absurd g ar admite primitive, atunci şi $h = f - g$ ar avea aceeaşi calitate. Ori $h(J) = (f-g)(J) = \{0, f(x_0) - g(x_0)\}$ nu este interval, ceea ce arată că h nu admite primitive. Contradicţia a provenit din presupunerea că g ar admite primitive.

O schemă de lucru utilă pentru a stabili dacă o funcţie $g : I \to \mathbb{R}$ (I interval) admite primitive pe I este prezentată pe pagina următoare.

Dată fiind o funcţie pe I, prima problemă pe care ne-o punem este aceea dacă funcţia este continuă pe I. Dacă este continuă, atunci se ştie că ea admite primitive pe I. Dacă însă g nu este continuă, atunci studiem dacă g are punct de discontinuitate de prima speţă din I. Dacă are, atunci (vezi M. Ganga – „Elemente de analiză matematică“ - partea întâi, editura Mathpress, 1997, ediţia a doua – la proprietăţile funcţiilor continue P7) g nu are proprietatea lui Darboux pe I şi deci g nu va admite primitive pe I. Dacă g nu are un astfel de punct în I, atunci studiem dacă g are proprietatea lui Darboux pe I. Dacă g nu are această proprietate pe I, atunci g nu admite aici primitive. Dacă însă se poate găsi $G : I \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile: 1) G este derivabilă pe I; 2) $G'(x) = g(x)$, $x \in I$, atunci G este o primitivă a lui g pe I. În cazul în care G nu verifică 1) sau 2), atunci g nu admite primitive pe I. Dacă g nu este continuă, atunci se încearcă construcţia unei primitive G (deci se sar prima şi a doua etapă).



Probleme rezolvate

1) Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ ax + b, & x > 0, \ a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Să se determine a, b astfel încât g să aibă primitive pe $\mathbb{R}$.

R. O primitivă $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a lui g are forma (se integrează g pe $(-\infty, 0]$ şi pe $(0, \infty)$)

$$G(x)=\begin{cases} e^x+k, & x\le 0\\ \dfrac{ax^2}{2}+bx+k', & x>0\,. \end{cases}$$

Cum G este derivabilă în $x=0$, rezultă G continuă în $x=0$, adică $\lim\limits_{x\nearrow 0} G(x)=\lim\limits_{x\searrow 0} G(x)=G(0)\Leftrightarrow 1+k=k'$.

Dacă luăm $k=0$, atunci $k'=1$.

Funcţia G este derivabilă în $x=0\Leftrightarrow G'_s(0)=G'_d(0)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow 0} e^x=\lim\limits_{x\searrow 0}(ax+b)\Leftrightarrow b=1$.

În final $G(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0\\ \dfrac{ax^2}{2}+x+1, & x>0 \end{cases}$

este primitivă pentru g pe $\mathbb{R}$, deoarece G este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $G'(x)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$ ($G'(x)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$ din construcţia lui G şi $G'(0)=g(0)=1$ de mai sus).

Deci $a\in\mathbb{R}$, $b=1$. □

Altfel. Se scrie g sub forma

$$g(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0\\ 1+ax, & x>0 \end{cases}+\begin{cases} 0, & x\le 0\\ b-1, & x>0\,. \end{cases}$$

Prima funcţie este continuă şi deci admite primitive (pe $\mathbb{R}$). Pentru a doua funcţie, dacă $b-1\neq 0$, atunci $x=0$ ar fi punct de discontinuitate de prima speţă şi deci funcţia n-ar admite primitive. Deci trebuie ca $b-1=0$, iar $a\in\mathbb{R}$, caz în care g apare ca sumă de funcţii ce admit primitive. □

2) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{-3x}\cos x$. Să se determine numerele reale m,n pentru care funcţia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=e^{-3x}(m\cos x+n\sin x)$ este o primitivă a lui g (pe $\mathbb{R}$).

R. Este clar că G este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Funcţia G este primitivă a lui g pe $\mathbb{R}$, dacă $G'(x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow e^{-3x}[(n-3m)\cos x-$ $-(m+3n)\sin x]=e^{-3x}\cos x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Cum egalitatea este adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ea se verifică şi pentru $x=0$, când $n-3m=1$ şi pentru $x=\dfrac{\pi}{2}$ când $m+3n=0$.

Rezolvând sistemul în m şi n rezultă $m=-\dfrac{3}{10}$, $n=\dfrac{1}{10}$. □

3) Fie $g:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{15x\sqrt{x+1}}{2}$. Să se determine a,b,c astfel încât $G:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{x+1}$ să fie

o primitivă a lui g pe $(-1,\infty)$.

R. Funcţia G fiind produs de funcţii derivabile pe $(-1,\infty)$, este o funcţie derivabilă. Această funcţie este primitivă pentru g (pe $(-1,\infty)$) dacă $G'(x)=g(x)$, $\forall\, x>-1$. Avem:

$$(2ax+b)\sqrt{x+1}+\frac{ax^2+bx+c}{2\sqrt{x+1}}=\frac{15x\sqrt{x+1}}{2},\ x>-1 \text{ sau}$$

$$(5a-15)x^2+(4a+3b-15)x+2b+c=0,\ x>-1.$$

Dând lui x trei valori distincte din intervalul $(-1,\infty)$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} 5a-15=0 \\ 4a+3b-15=0 \\ 2b+c=0\,, \end{cases}$$ cu soluţia $a=3,\ b=1,\ c=-2$. □

4) Fie $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$. Dacă g admite primitive pe $[a,c]$ şi pe $[c,b]$, atunci să se arate că g admite primitive pe $[a,b]$.

R. Fie $G_1:[a,c]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui g pe $[a,c]$, iar $G_2:[c,b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui g pe $[c,b]$. Atunci luăm $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ o posibilă primitivă a lui g (pe $[a,b]$) astfel:

$$G(x)=\begin{cases} G_1(x), & x\in[a,c] \\ G_2(x)+k, & x\in(c,b], \end{cases}$$

unde k se determină din cerinţa de continuitate a lui G în $x=c$. Avem: G este continuă în $x=c \Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow c} G(x)=\lim\limits_{x\searrow c} G(x)=G(c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow G_1(c)=G_2(c)+k$. De aici $k=G_1(c)-G_2(c)$.

Evident $G'(x)=g(x)$, $\forall\, x\in[a,b]-\{c\}$. Avem de arătat că $G'(c)=$

$=g(c)$. Avem: $G'_s(c)=\lim\limits_{x\nearrow c}\dfrac{G(x)-G(c)}{x-c}=\lim\limits_{x\nearrow c}\dfrac{G_1(x)-G_1(c)}{x-c}=$

$=(G_1)'_s(c)=g(c)$,

$$G'_d(c)=\lim_{x\searrow c}\frac{G(x)-G(c)}{x-c}=\lim_{x\searrow c}\frac{G_2(x)+k-G_2(c)}{x-c}=$$

$$=\lim_{x\searrow c}\frac{G_2(x)-G_2(c)}{x-c}=$$

$=(G_2)'_d(c)=g(c)$ ceea ce arată că $G'_s(c)=G'_d(c)=g(c)$. □

5) Să se arate că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}(x+1)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

R. Scriem funcţia g sub forma:

$$g(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}+\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}=g_1(x)+g_2(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Prima funcţie (g_1) este continuă pe $\mathbb{R}^*$, iar din $0\leq\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|$ se deduce $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=g_1(0)$, ceea ce arată că g_1 este continuă şi în $x=0$. Deci g_1 este continuă pe $\mathbb{R}$ şi prin urmare admite primitive pe $\mathbb{R}$. Funcţia g_2, vom arăta că admite primitive pe $\mathbb{R}$. Deci funcţia g fiind suma a două funcţii care au primitive pe $\mathbb{R}$, are de asemenea primitive pe $\mathbb{R}$ (g_2 este un exemplu de funcţie care nu este continuă, dar admite primitive). □

6) Să se arate că $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=[x]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x ($[x]\in\mathbb{Z}$, $[x]\leq x<[x]+1$), nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

R. Cum $g(\mathbb{R})=\mathbb{Z}$ nu este interval, rezultă că g nu admite primitive pe $\mathbb{R}$. □

7) Să se arate că $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-[x]$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

R. Aplicăm metoda reducerii la absurd. Dacă am presupune că g ar admite primitive pe $\mathbb{R}$, atunci $-g(x)+x$ $(=[x])$ ar admite primitive pe $\mathbb{R}$ (ca sumă de funcţii, care admit primitive pe $\mathbb{R}$) în contradicţie cu problema precedentă. Contradicţia a provenit din presupunerea făcută. Deci g nu admite primitive pe $\mathbb{R}$. □

8) Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

R. Dacă f ar admite o primitivă, atunci aceasta ar fi de forma:

$$F(x)=\begin{cases}k, & x\leq 0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+k', & x>0.\end{cases}$$

Din F continuă în $x=0$ rezultă $k=k'$. Se poate lua $k=0$.

Deci $F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

Este clar că F este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi $F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

Să vedem dacă $F'(0) = f(0)$. Avem:

$F'_s(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = 0$, $F'_d(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \searrow 0} \sin \dfrac{1}{x}$, care nu există. Deci F nu este derivabilă în $x = 0$.

Prin urmare f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$. □

Probleme propuse

1) Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii:

a) $f(x) = x^3 - 2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = x + \dfrac{5}{x^2}$, $x < 0$;

c) $f(x) = 3x - \dfrac{2}{x} + \sqrt{x}$, $x > 0$; d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3}$, $x < 0$;

e) $f(x) = x\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$; f) $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$, $x > 0$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $(1 = \sin^2 x + \cos^2 x)$;

h) $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

i) $f(x) = \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$; j) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

k) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$;

l) $f(x) = e^x\left(3 + 5\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

m) $f(x) = 3^x\left(1 - \dfrac{3^{-x}}{\sin^2 x}\right)$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; n) $f(x) = \dfrac{xe^x - x}{x}$, $x < 0$.

2) Să se arate că următoarele funcţii nu admit primitive pe domeniile de definiţie:

a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{R} \end{cases}$;

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$;

c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 2^x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$;

d) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}3-x, & x\in\mathbb{Q}\\ \dfrac{2}{x}, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}.\end{cases}$;

e)* Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ două funcţii continue, diferite şi funcţia

$h:(a,b)\to\mathbb{R},\ h(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b)\cap\mathbb{Q}\\ g(x), & x\in(a,b)\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q}).\end{cases}$

Să se arate că h nu admite primitive pe (a,b).

f) Să se arate că $h:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to[0,1]$,

$$h(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cap\mathbb{Q}\\ \cos x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\end{cases}$$

nu admite primitive pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3) Să se stabilească dacă funcţiile date admit primitive pe domeniile de definiţie şi în caz afirmativ să se calculeze o primitivă pentru fiecare funcţie:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e^x+1, & x\geq 0\\ x^2+2, & x<0\end{cases}$;

2) $f:[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]\\ 1-\cos x, & x\in[-\dfrac{\pi}{2},0)\end{cases}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x+2|$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-2|$;
5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x^2-4|$; 6) $f:[-2\pi,2\pi]\to\mathbb{R}$,
$f(x)=|\cos x|$;

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}, & x\geq 1\\ \sin(x-1), & x<1\end{cases}$;

8) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x\geq 1\\ \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}, & x\in[0,1)\end{cases}$;

9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1}, & x\leq 0\\ 1-\sqrt{x}, & x>0\end{cases}$;

---

* Exerciţiile marcate cu $*$ sunt considerate mai dificile.

10) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2-1}, & x\le -2\\ -\dfrac{x}{6}, & x>-2\end{cases}$;

11) $f:[-1,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, & x\in[-1,0)\\ \dfrac{1}{\cos^2 x}, & x\in[0,\frac{\pi}{2})\end{cases}$;

12) $f:[-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3^x}{2}, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}, & x\in[-1,0)\end{cases}$;

13) $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x, & x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ 1+\operatorname{tg}x, & x\in(-\frac{\pi}{2},0)\end{cases}$;

14) $f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+|x|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

15) $f:(0,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\sqrt{x^2-2x+1}$

16) $f:(-2,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=|ax(x,x^3)$

17) $f:(-3,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=|in(x^2-1,x+1)$.

4) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia G să fie o primitivă a lui g în cazurile:

a) $g,G:\left(-\frac{1}{3},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{1+3x}$, $G(x)=(ax+b)\sqrt{1+3x}$;

b) $g,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$, $G(x)=(ax+b)\sqrt{x^2+1}$.

5) Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia G să fie o primitivă a lui g în cazurile:

a) $g,G:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=x\sqrt{3-2x}$,
$G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$;

b) $g,G:\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{2}(5x+4)\sqrt{4-x}$,
$G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{4-x}$.

6) Fie $g:[1,e]\to\mathbb{R},\ g(x)=\ln^4 x$. Să se determine $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

astfel încât $G:[1,e]\to\mathbb{R}$, $G(x)=x(\ln^4 x+a\ln^3 x+b\ln^2 x+$ $+c\ln x+d)$ să fie o primitivă a lui g pe $[1,e]$.

7) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=x^2|x-a|-|x-b|$ să fie primitiva unei funcţii $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

8) Dată fiind o funcţie g să se determine o primitivă G a lui g al cărei grafic să conţină punctul A:

1) $g(x)=4x^3-2x+3$, $A(1,3)$; 2) $g(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$, $A(1,0)$;

3) $g(x)=\sin x+\cos 2x$, $A(\dfrac{\pi}{2},1)$; 4) $g(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^3}$, $A(-2,0)$.

9) Pentru fiecare din funcţiile date mai jos, să se determine o primitivă al cărei grafic conţine punctul A indicat.

1) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}x-1, & x\le -2\\ -x^2+1, & x\in(-2,2]\\ -3, & x>2\end{cases}$, $A(1,1)$;

2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0\\ -x, & x\in(0,2]\\ x-4, & x>2\end{cases}$, $A(0,0)$.

10) Să se arate că următoarele funcţii nu admit primitive pe $\mathbb{R}$:

1) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 2) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$

3) $g(x)=\begin{cases}x-\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 2000, & x=0\end{cases}$.

11) Să se arate că nu există $k\in\mathbb{R}$ pentru ca funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$ să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

12) Să se determine $k\in\mathbb{R}$, astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$ să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

13) Să se arate că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

14) Să se determine $k \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ln x + x, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$ admite primitive pe $[0, \infty)$.

15) Să se determine $k \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \ln x, & x > 1 \\ k, & x = 1 \\ 1 + \ln x^2, & x < 1 \end{cases}$$ admite primitive pe $(0, \infty)$.

16) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite o primitivă neinjectivă. Să se arate că f se anulează cel puţin într-un punct.

17)* Fie $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \sin x$, $h(x) = f(x) \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Dacă funcţiile g, h admit primitive pe $\mathbb{R}$, atunci să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

18)* Să se determine $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ştiind că admit primitivele (pe $\mathbb{R}$) F, G, H şi în plus $f = G + H$, $g = F + H$, $h = F + G$.

Teste pentru pregătirea examenului de bacalaureat

Testul 1

I. Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\ln(1-x) - x \ln x, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

1. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x)$. b) Să se arate că f este continuă pe $[0, 1]$. c) Să se studieze monotonia lui f;

d) Să se arate că $a \ln a + b \ln b \geq \ln \frac{1}{2}$, $\forall\, a, b > 0$, cu $a + b = 1$.

2. a) Să se calculeze $f''(x)$, $x \in (0, 1)$. b) Să se arate că f este concavă pe $[0, 1]$. c) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la graficul funcţiei f în punctele $A\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, $B\left(\frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$. d) Să se arate că dreapta $2x - 1 = 0$ şi tangentele determinate la punctul anterior sunt drepte concurente.

II. 1. Se consideră $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 - 5X + 5$, $g = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ astfel încât $g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 15$.
a) Folosind teorema lui Bézout, să se determine coeficienţii polinomului g. b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui g la f.

c) Să se calculeze rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ ale polinomului g.

2. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = (x^2+1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. b) Să se calculeze $f'(x)$.
c) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei f.
d) Utilizând metoda inducţiei matematice să se arate că
$f^{(n)}(x) = ((x+1)^2 + a_n(x+1) + b_n)e^x$, $x \in \mathbb{R}$,
unde a_n, b_n sunt numere întregi. e) Determinaţi pe a_n şi b_n în funcţie de n. f) Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f'(0) + f''(0) + \ldots + f^{(n)}(0)}{n^3}$.

III. 1. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră elipsele de ecuaţii $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ şi $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
Pentru fiecare elipsă să se scrie ecuaţia tangentei în punctul de abscisă 3 şi ordonată negativă. Să se arate că aceste tangente se intersectează într-un punct situat pe axa Ox. Trasaţi elipsele şi tangentele.

2. a) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $A(7, 2, -3)$ şi $B(5, 6, -4)$ şi este paralel cu axa Ox.
b) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1, 2, -3)$, este perpendiculară pe vectorul $\overline{a} = (6, -2, -3)$ şi intersectează dreapta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{5}$.

IV. 1. Se consideră mulţimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ -2x & 0 & 1-x \end{pmatrix} ; \, x > -1 \right\}.$$

a) Arătaţi că G este o parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.
b) Arătaţi că $(G, \cdot)$ este monoid abelian izomorf cu monoidul $(\mathbb{R}, +)$.

2. Se consideră un caroiaj al primului cadran al reperului xOy cu pătrate de latură egală cu unu. Deplasarea în reţea se face orizontal şi vertical pe drumuri minimale (Orice drum minimal care pleacă din $O(0,0)$ şi ajunge în $A_n(n,n)$ conţine n segmente orizontale şi n segmente verticale). Care este probabilitatea ca plecând din punctul $O(0,0)$ să se ajungă în punctul $B(6,6)$ trecând obligatoriu prin punctul $A(3,3)$?
(pentru profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie)

Testul 2

I. 1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^{ax}+1, & x\le 1\\ ax+2, & x>1.\end{cases}$

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia să fie continuă pe $\mathbb{R}$.
b) Pentru a determinat la punctul a), arătaţi că funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R}$. c) Pentru $a=1$, reprezentaţi grafic funcţia dată.

2. Se consideră binomul $(\sqrt{2}+1)^{100}$.
a) Să se determine numărul de termeni raţionali ai binomului.
b) Să se determine rangul termenului maxim al dezvoltării binomului.
c) Să se arate că $(\sqrt{2}+1)^{100}<6^{50}$.

II. 1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sin x$.
a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$. b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.
c) Să se arate că f este bijectivă. Notăm cu $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ inversa funcţiei f. Să se calculeze $g'(2\pi)$.

2. a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{n+1}{bn^2+n+2}\right)^{n+2}=e^{-1}.$$

b) Fie şirul cu termenul general $a_k=\ln\sqrt{\dfrac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}}$, $k\in\mathbb{N}^*$.

1°) Să se calculeze $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $n\in\mathbb{N}^*$.

2°) Să se arate că şirul $b_n=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3(n+1)}{n+3}$, $n\in\mathbb{N}^*$, este monoton şi mărginit.

3°) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

III. 1. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$, $B(-2,10)$ şi dreapta $(d):\ 3x+2y-6=0$.

a) Să se reprezinte dreapta şi punctele.
b) Calculaţi lungimea segmentului $[AB]$.
c) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctele A şi B.
d) Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin A, B şi are centrul pe dreapta (d).
e) Determinaţi punctul de intersecţie dintre dreapta (d) şi

dreapta AB.

2. a) Stabiliţi dacă planele de ecuaţii $2x-3y+z-5=0$, $3x+4y+6z+2=0$ sunt perpendiculare.

b) Să se arate că dreapta $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-4t \\ z=-5+4t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, este paralelă planului $4x-3y-6z-5=0$.

IV. 1. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=xy-2(x+y)+6$ şi $M=(-\infty,1]\cup[3,\infty)$.

a) Să se arate că M este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea$*$.

b) Să se arate că $(M,*)$ este monoid comutativ.

c) Să se determine elementele inversabile ale monoidului $(M,*)$.

2. Într-o urnă sunt bile roşii şi negre, în total 15. Se ştie că dacă se extrag două bile din urnă, fără repunerea primei bile în urnă, atunci probabilitatea ca exact o bilă (din cele extrase) să fie roşie este egală cu $\frac{18}{35}$. Să se determine numărul de bile roşşii.

(pentru profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie)

Testul 3

I. 1. Se consideră funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$.

a) Să se determine D. b) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in D$.

c) Să se determine $f^{(n)}(x)$, $n\in\mathbb{N}$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n))$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-ax-a+3$, $a\in\mathbb{R}$, parametru.

a) Să se arate că vârful parabolei $y=f(x)$ se află pe parabola de ecuaţie $y=-x^2-2x+3$. b) Să se determine valorile lui a pentru care $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. c) Să se determine valorile lui a pentru care ecuaţia $f(x)=0$ are o singură soluţie strict pozitivă. d) Să se determine valorile lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $4^x-a\cdot 2^x-a+3=0$ are soluţie unică. e) Pentru $a\in(0,\infty)-\{1\}$ să se rezolve inecuaţia: $\log_a^2(x^2)-2a\log_a(x^2)+a^2\le 0$.

II. 1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.

a) Să se determine punctele de extrem local ale lui f.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale lui f.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x)+x=0$.

2. Fie funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{ax^2+bx+1}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$, D este domeniul maxim de definiţie.

a) Să se determine a, b astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

b) Pentru $a=b=1$ să se determine asimptotele la graficul funcţiei obţinute.

III. 1. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ şi $B(1,4)$.

a) Să se determine ecuaţia cercului $\mathcal{C}$ de centru A şi care trece prin B. Reprezentaţi cercul $\mathcal{C}$. b) Să se scrie ecuaţiile tangentelor la cerc în punctele care au abscisa $x=-1$. Să se arate că aceste tangente sunt paralele cu axa Ox.

2. Să se arate că dreapta $(d):\begin{cases}x=3+4t\\y=1-4t\\z=-3+t,\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, este inclusă în planul $(\mathcal{P}):\ 3x+2y-4z-23=0$.

IV. 1. Să se rezolve: a) ecuaţia $3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4=0$; b) inecuaţia $\log_4(5-x^2)<\log_2(x^2+1)$.

2. Se defineşte pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie „$*$“ astfel: $x*y=xy+4(x+y)+a$, unde $a\in\mathbb{R}$ şi $I=(-4,\infty)$.

a) Să se determine valorile lui a pentru care I este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$“.

b) Să se determine valorile lui a pentru care „$*$“ are element neutru pe $\mathbb{R}$. c) Pentru valoarea lui a determinată la punctul b) să se arate că $(I,*)$ este grup abelian. d) Să se calculeze $\underbrace{1*1*\ldots*1}_{n\text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

(pentru profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie)

Testul 4

I. 1. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei $x^3+3x^2-9x+m=0$, $m\in\mathbb{R}$ şi determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_2&x_3&x_1\\x_3&x_1&x_2\end{vmatrix}$. Să se calculeze determinantul Δ în funcţie de parametrul real m. Să se determine m,

astfel încât $m+1+\sqrt{m+1}=\frac{1}{18}\Delta$.

2. Se consideră mulţimea:

$$M=\left\{A_x=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix};\ x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}.$$

Să se demonstreze că înmulţirea matricilor este lege de compoziţie internă pe M şi că $(M,\cdot)$ este grup abelian.

II. 1. Se consideră funcţia f definită prin

$f(x)=2\text{arctg}x-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

a) Să se determine D, domeniul maxim de definiţie şi domeniul de derivabilitate al funcţiei f.

b) Să se precizeze dacă există intervale pe care f este constantă (precizaţi constanta).

2. Se consideră funcţia $f:(-\infty,\frac{3}{2})\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3-2x}$. Să se determine numerele reale a,b,c astfel încât funcţia $F:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to$

$\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$ să fie primitivă a funcţiei f.

III. 1. Se consideră cercul de ecuaţie $x^2+y^2-6x+3y-5=0$.

a) Să se determine coordonatele centrului şi raza acestui cerc.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul $A(-1,-2)$.

c) Să se precizeze poziţia punctului $B(0,-4)$ faţă de cerc.

(Bacalaureat, iunie 1998, varianta 2, problema III clase cu profil matematică-fizică, informatică, metrologie)

2. Precizaţi dacă punctele $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$, $C(2,0,2)$, $D(1,1,2)$ sunt coplanare.

IV. 1. Pe mulţimea numerelor reale definim legea

$x*y=-xy+5x+5y-20$.

a) Să se arate că legea este asociativă. b) Să se arate că $x*4=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. c) Să se arate că mulţimea $(-\infty,5)$ este parte stabilă în raport cu legea „$*$“.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$.

a) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)=(-1)^ne^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(2)}(0)+f^{(4)}(0)+\ldots+f^{(2n)}(0))}{n+1}$.

(Bacalaureat, august 2000, varianta 3, problema II, profilurile economic, fizică-chimie)

(Pentru profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie)

Testul 5

I. 1. Să se rezolve ecuaţia: $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$.

2. Se consideră mulţimea matricilor $M=\left\{A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| \; x,y\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se demonstreze că M este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricilor.

b) Să se demonstreze că M împreună cu legile induse formează o structură de inel comutativ.

c) Are inelul M divizori ai lui zero ?

3. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix}=0$.

II. Se consideră funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+ax+b}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a şi b pentru care graficul funcţiei admite ca asimptotă verticală dreapta $x=-2$ şi funcţia are un maxim în punctul $x=2$.

b) Pentru $a=-4$ şi $b=-12$ să se studieze variaţia şi să se construiască graficul funcţiei obţinute.

2. Să se demonstreze că, pentru orice $x\geq 1$, $\dfrac{2(x-1)}{x+1}\leq \ln x$.

III. 1. Să se determine coordonatele ortocentrului triunghiului format de punctele $A(1,4)$, $B(3,-1)$, $C(8,-2)$.

(Bacalaureat, iunie 1998, varianta 5, problema III, clase cu profil economic)

2. Să se determine în planul xOy un punct P astfel încât suma distanţelor de la acest punct la punctele $A(-1,2,5)$ şi $B(11,-16,10)$ să fie minimă.

IV. 1. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x*y=2xy-6x-6y+21$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea „$*$“ este asociativă şi comutativă.
c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de 10 ori } x} = 3$.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ mx - y + 4z = 1 \end{cases}$, m parametru real şi A matricea sistemului.
a) Să se calculeze $\det(A)$. b) Să se determine valorile lui m pentru care sistemul este compatibil determinat. c) Pentru $m = 3$ să se rezolve sistemul.

3. Se consideră funcţia $g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{1-x}$.
a) Să se determine g'.
b) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei g.
c) Să se demonstreze că $g^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(Bacalaureat, iunie 2000, varianta 2, subiectul III, profilurile industrial, agricol, silvic şi sportiv-real)
(Pentru profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie)

1.5. METODE DE CALCUL AL PRIMITIVELOR

1.5.1. Integrarea prin părţi

O primă metodă ce permite calcularea integralelor unor funcţii date este oferită de integrarea prin părţi. Are loc următorul rezultat important.

Teoremă. Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ (I interval) sunt funcţii derivabile cu derivate continue, atunci funcţiile $f' \cdot g$ şi $f \cdot g'$ admit primitive şi mulţimile lor de primitive sunt legate prin relaţia

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x, \qquad (*)$$

Demonstraţie. Funcţiile $f' \cdot g$ şi $f \cdot g'$ fiind continue pe I, admit primitive pe I.

Demonstrăm egalitatea de mulţimi prin dubla incluziune.

„$\subset$“. Fie $H \in \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$. Deci $H' = fg'$. Fie $F \overset{def}{=} fg - H$. Avem:

$F' = (fg)' - H' = f'g$, ceea ce arată că $F \in \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Deci $H = fg - F \in fg - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$. Cum H a fost o funcţie arbitrară rezultă:

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \subset f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x, \qquad (1).$$

„$\supset$“. Reciproc, fie $G \in f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$. Există $F \in \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$ astfel încât $G = fg - F$. Avem $G' = (fg)' - F' = fg'$, ceea ce arată că $G \in \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$. Deoarece G a fost o funcţie arbitrară din membrul drept al relaţiei $(*)$ rezultă

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \supset f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x, \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) se obţine $(*)$.

Observaţii. 1) Formula $(*)$ este cunoscută sub numele de **formula integrării prin părţi.**

2) De obicei se ia f funcţia mai complicată de sub semnul integrală astfel încât integrala din dreapta formulei $(*)$ să fie mai simplă decât integrala din stânga. Dacă integrala din dreapta egalităţii $(*)$ este mai dificilă, atunci se face o altă alegere pentru f şi g'.

3) Deoarece $g'(x)\mathrm{d}x = dg(x)$, $f'(x)\mathrm{d}x = df(x)$, atunci formula integrării prin părţi se mai scrie $\int f\,dg = fg - \int g\,df$.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze integralele:

1) $\int \ln x\mathrm{d}x,\ x > 0$; 2) $\int x \ln x\mathrm{d}x,\ x > 0$; 3) $\int \ln^2 x\mathrm{d}x,\ x > 0$;

4) $\int x^2 e^x\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$; 5) $\int (x^3 + x + 1)e^x\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$;

6) $\int (x^2+2x)e^{3x}\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$; 7) $\int x\sin x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

8) $\int \sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x,\ x>3$; 9) $\int \sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

10) $\int \sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x,\ x\in(-4,4)$; 11) $\int x\sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x,\ x>3$;

12) $\int x^2\sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x,\ x>3$; 13) $\int e^x\sin x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

14) $\int e^x\cos x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$; 15) $\int x^2\sin x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

16) $\int \arcsin x\mathrm{d}x,\ x\in(-1,1)$; 17) $\int \mathrm{arctg}x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

18) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^6 x},\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$;

19) $I_n=\int \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$

R. 1) Alegem $f(x)=\ln x,\ g'(x)=1$. De aici $f'(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=x$.
Formula integrării prin părţi dă

$$\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x-\int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.\ \square$$

2) Punem $f(x)=\ln x,\ g'(x)=x$. Deci $f'(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=\dfrac{x^2}{2}$.
Aplicăm formula integrării prin părţi şi rezultă:

$$\int x\ln x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.\ \square$$

Observaţie. Se poate lua

$$\int x\ln x\mathrm{d}x = x^2(a\ln x+b)+C,$$

unde a,b se determină din cerinţa ca
$[x^2(a\ln x+b)]'=x\ln x,\ (\forall)\ x>0$, adică
$(2a-1)\ln x+(a+2b)=0,\ (\forall)\ x>0$.
Pentru $x=1$ rezultă $a+2b=0$, iar pentru $x>0,\ x\neq 1$ se deduce
$2a-1=0$. De aici $a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{4}$. $\square$

3) Notăm $f(x)=\ln^2 x$, $g'(x)=1$ şi avem: $f'(x)=\dfrac{2}{x}\ln x$, $g(x)=x$.

Găsim: $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx$.

Pentru integrala din membrul drept se aplică din nou integrarea prin părţi. Avem, conform cu 1),

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C. \square$$

Observaţie. Se poate lua $\int \ln^2 x\,dx = x(\ln^2 x + a\ln x + b) + C$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ se determină din cerinţa $[x(\ln^2 x + a\ln x + b)]' = \ln^2 x$, $x > 0$, adică $(a+2)\ln x + a + b = 0$, $\forall x > 0$.
De aici $a + 2 = 0$, $a + b = 0$, adică $a = -2$, $b = 2$. $\square$

4) Dacă am nota $f(x) = e^x$, $g'(x) = x^2$, atunci $f'(x) = e^x$, $g(x) = \frac{x^3}{3}$ şi deci $\int x^2 e^x dx = \frac{x^3}{3}e^x - \frac{1}{3}\int x^3 e^x dx$

Ori integrala din dreapta este mai complicată decât cea iniţială. Atunci vom lua $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$ cu $f'(x) = 2x$, $g(x) = e^x$.

Deci $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$.

Pentru a doua integrală se aplică din nou integrarea prin părţi luând $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ când $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$. Deci

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

În final $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C. \square$

Observaţie. Dacă avem de calculat $\int P_n(x) e^{\alpha x} dx$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}$, unde $P_n(x)$ este un polinom de gradul n, atunci se pune

$$\boxed{\int P_n(x) e^{\alpha x} dx = Q_n(x) e^{\alpha x} + C, \text{ unde}}$$

$Q_n(x)$ este un polinom de grad n (**de acelaşi grad** cu P_n) ai cărui coeficienţi se determină din condiţia

$[Q_n(x)e^{\alpha x}]' = P_n(x)e^{\alpha x}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

(aplicând **metoda coeficienţilor nedeterminaţi**).

În cazul exerciţiului 4) punem $\int x^2 e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x + C$

$(P_2(x) = x^2,\ Q_2(x) = ax^2 + bx + c,\ \alpha = 1)$.

Coeficienţii a, b, c îi determinăm din cerinţa

$[(ax^2 + bx + c)e^x]' = x^2e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, adică

$[ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^x = x^2e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

De aici $a = 1,\ 2a + b = 0,\ b + c = 0$, adică $a = 1,\ b = -2,\ c = 2$.

Aşadar $\int x^2e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$. □

5) Se ia $\int (x^3 + x + 1)e^x dx = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x + C$,

unde a, b, c, d se determină din cerinţa

$[(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x]' = (x^3 + x + 1)e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Se găseşte că $a = 1,\ b = -3,\ c = 7,\ d = -6$. □

6) Se pune $\int (x^2 + 2x)e^{3x} dx = (ax^2 + bx + c)e^{3x} + C$

şi se determină a, b, c din condiţia

$[(ax^2 + bx + c)e^{3x}]' = (x^2 + 2x)e^{3x},\ x \in \mathbb{R}$.

Se găseşte $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{4}{9},\ c = -\frac{4}{27}$. □

7) Se ia $f(x) = x,\ g'(x) = \sin x$ şi deci $f'(x) = 1,\ g(x) = -\cos x$.

Avem:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \square$$

8) Se scrie integrala sub forma (se amplifică sub semnul integrală cu $\sqrt{x^2 - 9}$)

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{x^2 - 9} dx = \int \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 9}} dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 9}} - 9 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}} =$$

$$\int x(\sqrt{x^2 - 9})' dx - 9 \ln |x + \sqrt{x^2 - 9}|.$$

Pentru a calcula ultima integrală punem: $f(x) = x,\ g'(x) = (\sqrt{x^2 - 9})'$ şi deci $f'(x) = 1,\ g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$. Deci

$$\int x(\sqrt{x^2 - 9})' dx = x\sqrt{x^2 - 9} - \int \sqrt{x^2 - 9} dx = x\sqrt{x^2 - 9} - \mathcal{I}.$$

Deci

$\mathcal{I} = x\sqrt{x^2 - 9} - \mathcal{I} - 9 \ln |x + \sqrt{x^2 - 9}|$, iar de aici

$\mathcal{I} = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 - 9} - 9 \ln |x + \sqrt{x^2 - 9}|) + C. \square$

Observaţie. 1) În general

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right) + C,$$
$$x \in I,\ I \subset (-\infty,-a) \text{ sau } I \subset (a,\infty),\ a>0$$

2) Să observăm că funcţia $x \to x\sqrt{x^2-9}$ este continuă pe $[3,\infty)$ (interval închis la stânga). Pentru a găsi o primitivă G a acesteia pe $[3,\infty)$ nu se poate aplica tehnica de lucru de mai sus deoarece funcţia $x \to \sqrt{x^2-9}$ **nu este derivabilă** în $x=3$. Pentru a găsi o astfel de primitivă se calculează mai întâi o primitivă F pe $(3,\infty)$ (interval deschis în 3 când se găseşte $F(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-9} - 9\ln|x+\sqrt{x^2-9}|))$ cu procedeul aplicat mai sus, după care primitiva căutată $G : [3,\infty) \to \mathbb{R}$ are forma

$$G(x) = \begin{cases} k, & x=3 \\ F(x), & x>3\,. \end{cases}$$

Constanta k se determină din cerinţa ca G să fie continuă la dreapta în $x=3$, când avem $\quad k = \lim\limits_{x \searrow 3} G(x) = -\frac{9}{2}\ln 3.$

De fapt se prelungeşte F prin continuitate în $x=3$ $(k=F(3))$.

Acum $\int \sqrt{x^2-9}dx = G(x)+C$, unde G este primitiva de mai sus.

9) Avem (asemănător cu 8))

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{x^2+9}dx = \int \frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+9}}dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+9}} + 9\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} =$$
$$= \int x(\sqrt{x^2+9})'dx + 9\ln(x+\sqrt{x^2+9}).$$

Integrala ultimă se calculează prin părţi luând $f(x)=x$, $g'(x)=(\sqrt{x^2+9})'$ şi de aici $f'(x)=1$, $g(x)=\sqrt{x^2+9}$. Aşadar $\mathcal{I} = x\sqrt{x^2+9} -$
$$-\int \sqrt{x^2+9}dx + 9\ln(x+\sqrt{x^2+9}) = x\sqrt{x^2+9} - \mathcal{I} + 9\ln(x+\sqrt{x^2+9}).$$

De aici $\mathcal{I} = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+9} + 9\ln(x+\sqrt{x^2+9})] + C$. □

Observaţie. Analog avem:

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right] + C,\ a \neq 0.$$

10) Scriem succesiv:

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{16-x^2}dx = \int \frac{16-x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx = 16\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} +$$

$$+\int x(\sqrt{16-x^2})'dx = 16\arcsin\frac{x}{4}+\int x(\sqrt{16-x^2})'dx.$$

Ultima integrală se calculează prin părţi luând $f(x)=x$, $g'(x)=(\sqrt{16-x^2})'$ când $f'(x)=1$, $g(x)=\sqrt{16-x^2}$. Deci

$$\mathcal{I}=16\arcsin\frac{x}{4}+x\sqrt{16-x^2}-\int\sqrt{16-x^2}dx=16\arcsin\frac{x}{4}+$$

$+x\sqrt{16-x^2}-\mathcal{I}$. De aici $\mathcal{I}=\frac{1}{2}(16\arcsin\frac{x}{4}+x\sqrt{16-x^2})+C$.□

Observaţie. Procedând asemănător

$$\boxed{\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C,\ x\in(-a,a),\ a>0.}$$

11) Avem:

$$\mathcal{I}=\int x\sqrt{x^2-9}dx=\int\frac{x(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}dx=\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}dx-9\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}=$$

$$=\int x^2(\sqrt{x^2-9})'dx-9\int(\sqrt{x^2-9})'=\int x^2(\sqrt{x^2-9})'dx-9\sqrt{x^2-9}.$$

Pentru calculul ultimei integrale se pune $f(x)=x^2$, $g'(x)=(\sqrt{x^2-9})'$ când $f'(x)=2x$, $g(x)=\sqrt{x^2-9}$ şi se aplică formula integrării prin părţi. Avem:

$$\int x^2(\sqrt{x^2-9})'dx=x^2\sqrt{x^2-9}-2\int x\sqrt{x^2-9}dx=x^2\sqrt{x^2-9}-2\mathcal{I}.$$

Aşadar

$\mathcal{I}=x^2\sqrt{x^2-9}-2\mathcal{I}-9\sqrt{x^2-9}$ sau $\mathcal{I}=\frac{1}{3}(x^2-9)\sqrt{x^2-9}+C$. □

12) Avem succesiv:

$$\mathcal{I}=\int x^2\sqrt{x^2-9}dx=\int\frac{x^2(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^2-9}}-9\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-9}}=$$

$$=\int x^3(\sqrt{x^2-9})'dx-9\int x(\sqrt{x^2-9})'dx,\quad(1).$$

Pentru prima integrală din (1) se ia $f(x)=x^3$, $g'(x)=(\sqrt{x^2-9})'$ şi deci $f'(x)=3x^2$, $g(x)=\sqrt{x^2-9}$ şi apoi se aplică integrarea prin părţi având

$$\int x^3(\sqrt{x^2-9})'dx=x^3\sqrt{x^2-9}-3\int x^2\sqrt{x^2-9}dx=x^3\sqrt{x^2-9}-3\mathcal{I}.$$

Pentru a doua integrală din (1) se pune $f(x)=x$, $g'(x)=(\sqrt{x^2-9})'$ şi avem $f'(x)=1$, $g(x)=\sqrt{x^2-9}$. Deci

$$\int x(\sqrt{x^2-9})'dx = x\sqrt{x^2-9} - \int \sqrt{x^2-9}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2-9} - \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-9} - 9\ln|x+\sqrt{x^2-9}|) + C.$$

În fine

$$\mathcal{I} = x^3\sqrt{x^2-9} - 3\mathcal{I} - 9[x\sqrt{x^2-9} - \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-9} - 9\ln|x+\sqrt{x^2-9}|)],$$

adică

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4}\left[(x^3 - \frac{9}{2}x)\sqrt{x^2-9} - \frac{81}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}|\right] + C. \square$$

13) Se pune $f(x) = e^x$, $g'(x) = \sin x$ şi deci $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos x$, iar în continuare se aplică formula integrării prin părţi având

$$\mathcal{I} = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Pentru integrala din dreapta se aplică din nou integrarea prin părţi punând $f(x) = e^x$, $g'(x) = \cos x$ şi deci $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$ şi prin urmare $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \mathcal{I}$.

Aşadar $\mathcal{I} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \mathcal{I}$.

De aici $\mathcal{I} = \frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x) + C. \square$

Observaţie. Are loc egalitatea

$$\boxed{\int e^x \sin x dx = e^x(a\cos x + b\sin x) + C}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$ se determină din egalitatea

$[e^x(a\cos x + b\sin x)]' = e^x \sin x, \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}$, adică

$(a+b)\cos x + (b-a)\sin x = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Pentru $x = 0$ rezultă $a + b = 0$, iar pentru $x = \frac{\pi}{2}$ rezultă $b - a = 1$.

Găsim $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. Deci $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x) + C. \square$

14) Se aplică integrarea prin părţi de două ori.

Altfel. Se pune $\int e^x \cos x dx = e^x(a\cos x + b\sin x) + C$

şi se continuă ca la exerciţiul 13) (**observaţie**). $\square$

15) Luăm $f(x) = x^2$, $g'(x) = \sin x$ şi deci $f'(x) = 2x$, $g(x) = -\cos x$.

Avem: $\mathcal{I} = \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$

Pentru integrala din dreapta se aplică din nou integrarea prin părţi. Acum punem $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ şi deci $f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$,

când obţinem:

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Deci $\mathcal{I} = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.\square$

Observaţie. Dacă avem de calculat $\int P(x)\sin(\lambda x)dx$, unde $P(x)$ este o funcţie polinomială, atunci se ia

$$\boxed{\int P(x)\sin(\lambda x)dx = A(x)\sin(\lambda x) + B(x)\cos(\lambda x) + C,}$$

unde A şi B sunt funcţii polinomiale de acelaşi grad cu P şi ai căror coeficienţi se deduc prin derivare şi identificare din

$$[A(x)\sin(\lambda x) + B(x)\cos(\lambda x)]' = P(x)\sin(\lambda x).$$

Analog se calculează $\int P(x)\cos(\lambda x)dx$, punând

$$\boxed{\int P(x)\cos(\lambda x)dx = A(x)\sin(\lambda x) + B(x)\cos(\lambda x) + C,}$$

16) Se ia $f(x) = \arcsin x$, $g'(x) = 1$ şi de aici $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g(x) = x$.

Avem: $\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x +$

$+ \int (\sqrt{1-x^2})' dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\square$

Observaţie. Dacă se punea problema determinării primitivelor funcţiei pe **intervalul închis** $[-1,1]$, atunci se determina o primitivă F a funcţiei $f(x) = \arcsin x$ pe intervalul deschis $(-1,1)$ unde f este **derivabilă** (vezi teorema de integrare prin părţi) şi apoi cu ajutorul acestei primitive se generează o primitivă G pentru f pe întreg intevalul închis $[-1,1]$ astfel

$$G(x) = \begin{cases} k_1, & x = -1 \\ F(x), & x \in (-1,1) \\ k_2, & x = 1 \end{cases},$$

unde constantele k_1, k_2 se determină din cerinţa ca G să fie continuă la dreapta în $x = -1$ şi la stânga în $x = 1$ când avem:

$k_1 = \lim\limits_{x\searrow -1} G(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $k_2 = \lim\limits_{x\nearrow 1} G(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Acum

$\int \arcsin x dx = G(x) + C$ unde G a fost găsită mai sus.

17) Notăm $f(x)=\text{arctg}x$, $g'(x)=1$ şi de aici $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x)=x$. Deci

$$\int \text{arctg}x\,dx = x\,\text{arctg}x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\,\text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.\square$$

18) Avem succesiv:

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x}(\text{tg}x)'dx = \frac{1}{\cos^4 x}\text{tg}x - 4\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^5 x} - 4\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^6 x}dx = \frac{\sin x}{\cos^5 x} - 4\mathcal{I} + 4\int \frac{dx}{\cos^4 x}, \quad (1).$$

Notăm

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}(\text{tg}x)'dx = \frac{\text{tg}x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \frac{\sin x}{\cos^3 x} -$$

$$-2\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}dx = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2\mathcal{I}_1 + 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2\mathcal{I}_1 + 2\text{tg}x.$$

De aici $3\mathcal{I}_1 = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} + 2\text{tg}x + C$, adică $\mathcal{I}_1 = \dfrac{\sin x}{3\cos^3 x} + \dfrac{2}{3}\text{tg}x + C$.

Revenind la (1) avem: $\mathcal{I} = \dfrac{\sin x}{\cos^5 x} - 4\mathcal{I} + \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^3 x} + \dfrac{8}{3}\text{tg}x + C$, adică

$$\mathcal{I} = \frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{4\sin x}{15\cos^3 x} + \frac{8\sin x}{15\cos x} + C.\ \square$$

19) $\mathcal{I}_n = \int x^{n-1}(\sqrt{x^2+1})'dx = {}^{n-1}\sqrt{x^2+1} -$

$$-(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{x^2+1}dx = x^{n-1}\sqrt{x^2+1} - (n-1)\int \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= x^{n-1}\sqrt{x^2+1} - (n-1)\cdot\left(\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= x^{n-1}\sqrt{x^2+1} - (n-1)\mathcal{I}_n - (n-1)\mathcal{I}_{n-2}.$$

De aici

$n\mathcal{I}_n = x^{n-1}\sqrt{x^2+1} - (n-1)\mathcal{I}_{n-2}$ sau $\mathcal{I}_n = \dfrac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+1} - \dfrac{n-1}{n}\mathcal{I}_{n-2}$.

Dacă $n=2$ rezultă $\mathcal{I}_2 = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C.\square$

2. Să se determine primitivele funcţiei $f:[1,e]\to[0,e^2]$ cu proprietatea că $|f(x)-f(y)| \geq |x^2\ln x - y^2\ln y|$, $\forall\, x,y\in[1,e]$.

R. Se consideră funcţia $g:[1,e]\to[0,e^2]$, $g(x)=x^2\ln x$. Relaţia din ipoteză se transcrie $|f(x)-f(y)|\geq|g(x)-g(y)|$, $\forall\, x,y\in[1,e]$. În această relaţie luăm $x=e$, $y=1$ şi avem: $|f(e)-f(1)|\geq e^2$. Cum $f(1)$, $f(e)\in[0,e^2]$, avem $|f(e)-f(1)|\leq e^2$. Aşadar $|f(e)-f(1)|=e^2$,

relaţie care poate avea loc în următoarele situaţii:
1) $f(1)=0,\ f(e)=e^2$ sau 2) $f(1)=e^2,\ f(e)=0$.
Dacă are loc 1), atunci $|f(x)|=|f(x)-f(1)|\geq|g(x)|=|x^2\ln x|$.
De aici $f(x)\geq x^2\ln x$, (*).
Pe de altă parte din $|f(x)-f(e)|=|f(x)-e^2|\geq|g(x)-e^2|$ rezultă $e^2-f(x)\geq e^2-g(x)$, ceea ce conduce la $f(x)\leq x^2\ln x$,. (**).
Din (*) şi (**) se găseşte $f(x)=x^2\ln x$ şi prin calcul

$$\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$

Dacă are loc 2), atunci din
$|f(x)-f(1)|\geq x^2\ln x$ rezultă $e^2-x^2\ln x\geq f(x)$
şi
$|f(x)-f(e)|=|f(x)|=f(x)\geq|x^2\ln x-e^2|=e^2-x^2\ln x$
deducem $f(x)=e^2-x^2\ln x$ şi prin calcul

$$\int f(x)dx=e^2x-\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{x^3}{9}+C.$$

Probleme propuse

1. Să se calculeze integralele:

1) $\int xe^{-x}dx,\ x\in\mathbb{R}$; 2) $\int x^2e^{2x}dx,\ x\in\mathbb{R}$;

3) $\int(x^2-2x-1)e^xdx,\ x\in\mathbb{R}$; 4) $\int(x^3-x+1)e^xdx,\ x\in\mathbb{R}$;

5) $\int(x^3+5x^2-2)e^{2x}dx,\ x\in\mathbb{R}$; 6) $\int x^2\ln xdx,\ x>0$;

7) $\int x^3\ln^2 xdx,\ x>0$; 8) $\int x^2\cos xdx,\ x\in\mathbb{R}$;

9) $\int x^2\cos 2xdx,\ x\in\mathbb{R}$; 10) $\int e^{2x}\sin^2 xdx,\ x\in\mathbb{R}$;

11) $\int e^{2x}\cos^2 xdx,\ x\in\mathbb{R}$; 12) $\int x\operatorname{arctg}xdx,\ x\in\mathbb{R}$;

13) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx,\ x>0$; 14) $\int\frac{xdx}{\sin^2 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

15) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 16) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx,\ x\in(-1,1)$;

17) $\int\ln(x^2+1)dx,\ x\in\mathbb{R}$; 18) $\int\sqrt{x}\ln xdx,\ x>0$;

19) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx,\ x \in \mathbb{R}$; 20) $\int e^x \sin 2x dx,\ x \in \mathbb{R}$;

21) $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$;

22) $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$;

23) $\int x e^x \sin x dx,\ x \in \mathbb{R}$; 24) $\int (\arcsin x)^2 dx,\ x \in (-1, 1)$;

25) $\int x \arcsin x dx,\ x \in (-1, 1)$; 26) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx,\ x \in (0, 1)$;

27) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx,\ x > \frac{1}{2}$; 28)* $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x dx,\ x \in \mathbb{R}$;

29) $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx,\ x > 0$; 30) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx,\ x > 0$;

31) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx,\ x > e$; 32) $\int x \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) dx,\ x > 1$;

33)* $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx,\ x > 0$; 34) $\int \arcsin \frac{2x}{1+x^2} dx,\ x \in \mathbb{R}$;

35)* $\mathcal{I}_1 = \int e^{\arcsin x} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx,\ \mathcal{I}_2 = \int e^{\arcsin x} dx;\ x \in (-1, 1)$;

36) $\int \sqrt{x^2+1} dx,\ x \in \mathbb{R}$; 37) $\int x^2 \sqrt{x^2+1} dx,\ x \in \mathbb{R}$;

38) $\int x^3 \sqrt{x^2+1} dx,\ x \in \mathbb{R}$; 39) $\int x^4 \sqrt{x^2-4} dx,\ x > 2$;

40) $\int \sqrt{9-x^2} dx,\ x \in (-3, 3)$; 41) $\int x^2 \sqrt{9-x^2} dx,\ x \in (-3, 3)$;

42) $\int \frac{dx}{\sin^6 x},\ x \in (0, \pi)$; 43) $\int \sqrt{|x^2-1|} dx,\ x \in \mathbb{R}$;

44) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x dx,\ x \in \mathbb{R}$; 45) $\int x^2 \ln \frac{x-1}{x} dx,\ x > 1$;

46) $\int \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) dx,\ x \in (0, 1]$.

2. Să se stabilească formula de recurenţă pentru fiecare din integralele de mai jos, calculând apoi $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ (pentru 1), 2), 3), 5), 6)) :

1) $\mathcal{I}_n = \int \ln^n x dx,\ x > 0,\ n \in \mathbb{N}^*$; 2) $\mathcal{I}_n = \int x^n e^x dx,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$;

3) $\mathcal{I}_n = \int x^n \sin x dx,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 2$;

4) $\mathcal{I}_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}^*,\ m, n \geq 2;$

5) $\mathcal{I}_n = \int \sin^n x \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2;$

6) $\mathcal{I}_n = \int \mathrm{tg}^n x \mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 2;$

7) $\mathcal{I}_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2;$

8) $\mathcal{I}_n = \int \frac{x^{2n}}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N};$ 9) $\mathcal{I}_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2n} x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}^*;$

10)* $\mathcal{I}_n = \int \cos^n x \sin nx \mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}^*;$

3. Să se arate că următoarele funcţii admit primitive pe domeniul de definiţie şi să se calculeze o primitivă a lor:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \geq 1 \\ x^2 - x, & x < 1 \end{cases};$

2) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4}, & x \leq 0 \\ 2 + \sin x, & x > 0 \end{cases}$

4) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2}, & x \in [0, 3] \\ x^2 - 3x, & x > 3 \end{cases};$

5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ x^2 \ln x, & x > 0 \end{cases};$

6) $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x\mathrm{arctg}x, & x \geq 0 \\ \arcsin x, & x \in (-1, 0) \end{cases};$

7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1), & x > 0 \\ xe^{2x}, & x \leq 0 \end{cases};$

8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^x \sin x, & x \leq 0 \\ xe^x, & x > 0 \end{cases};$

9) $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \arcsin x, & x \in [0, 1] \\ x \ln(-x), & x < 0 \end{cases};$

10) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x^2+1}, & x\le 0 \\ \sqrt{x}-x^2, & x>0 \end{cases}$;

11) $f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\max(e^x, 1+xe^x)$;

12) $f:(0,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1+x^2}\min(x,x^3)$;

13) $f:(0,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\max(x,x^2)$.

1.5.2. Schimbarea de variabilă

Înainte de a trece la expunerea acestei metode este necesară reactualizarea conceptului de diferenţială a unei funcţii.

Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, atunci am văzut în anul precedent că diferenţiala lui f este egală cu produsul dintre derivata lui f şi diferenţiala argumentului, adică $df(x)=f'(x)\mathrm{d}x$.

În cele ce urmează se prezintă două tehnici de lucru care permit calcularea integralelor unor funcţii date, când acestea se pot aduce la o formă convenabilă.

Prima metodă de schimbare de variabilă

Are loc următorul rezultat:

Teoremă. Fie I, J două intervale din $\mathbb{R}$ şi fie $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, două funcţii cu proprietăţile:

1) φ este derivabilă;

2) h admite primitive (H o primitivă a sa).

Atunci funcţia $(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitive pe I şi mai mult

$$\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = H(\varphi(x))+C.$$

Demonstraţie. Să observăm că $H\circ\varphi$ este o funcţie derivabilă pe I (fiind compunere de funcţii derivabile). Trebuie să arătăm că $(H\circ\varphi)' = (h\circ\varphi)\cdot\varphi'$, ceea ce-i imediat dacă ţinem seama de regula de derivare a funcţiilor compuse, când avem:

$$(H\circ\varphi)' = H'(\varphi)\cdot\varphi' = h(\varphi)\cdot\varphi' = (h\circ\varphi)\cdot\varphi'\ .$$

Observaţii. 1) Spunem că φ este **funcţia care schimbă variabila.** Uneori se înlocuieşte formal $\varphi(x)=t$ şi $\varphi'(x)\mathrm{d}x=dt$ în $\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathcal{I}$ când obţinem $\int h(t)\mathrm{d}t=\mathcal{I}_1$.

De fapt egalitatea $\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ se obţine din $\varphi(x)=t$ prin diferenţiere. Acum integrala $\mathcal{I}_1$ este mai uşor de calculat. Din $\mathcal{I}_1$ obţinem $\mathcal{I}$ prin înlocuirea lui t cu $\varphi(x)$.

2) Nu se poate pune egalitate între mulţimile $\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ şi $\int h(t)\mathrm{d}t$, deoarece prima este mulţimea primitivelor funcţiei $(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$, care sunt funcţii definite pe I, în timp ce a doua mulţime reprezintă primitivele funcţiei h, care sunt funcţii definite pe J.
Chiar dacă $I = J$, în general cele două mulţimi sunt distincte.
Vom spune că cele două integrale nedefinite sunt asociate una alteia.
Dacă notăm $\mathcal{I} = \int h(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$, atunci integrala asociată acesteia o notăm $\mathcal{I}_1 = \int h(t)\mathrm{d}t$.

Tabel de integrale nedefinite

Nr. crt.	INTEGRALA NEDEFINITĂ
1	$\int \varphi^n(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \frac{\varphi^{n+1}(x)}{n+1} + C,\ n \in \mathbb{N}$
2	$\int \varphi^a(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \frac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1} + C,\ a \neq -1,\ \varphi(I) \subset (0,\infty)$
3	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + C,\ \varphi(x) \neq 0,\ x \in I$
4	$\int a^{\varphi(x)}\varphi'(x)\mathrm{d}x = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$
5	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a}\right\rvert + C$ $\varphi(x) \neq \pm a,\ x \in I,\ a \neq 0$
6	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{a} + C,\ a \neq 0$
7	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{\varphi(x)}{a} + C,\ a > 0,\ \varphi(I) \subset (-a, a)$
8	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + a^2}}\mathrm{d}x = \ln[\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) + a^2}] + C,\ a \neq 0$
9	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - a^2}}\mathrm{d}x = \ln\lvert\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - a^2}\rvert + C,$ $a > 0,\ \varphi(I) \subset (-\infty, -a)$ sau $\varphi(I) \subset (a, \infty)$

Nr. crt.	INTEGRALA NEDEFINITĂ
10	$\int \sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\cos\varphi(x)+C$
11	$\int \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = \sin\varphi(x)+C$
12	$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\varphi(x)+C,$ $\varphi(x)\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z},\ x\in I$
13	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}\varphi(x)+C,\ \varphi(x)\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ x\in I$
14	$\int \mathrm{tg}\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos\varphi(x)\rvert+C,$ $\varphi(x)\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z},\ x\in I$
15	$\int \mathrm{ctg}\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin\varphi(x)\rvert+C,$ $\varphi(x)\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ x\in I$
16	$\int \mathrm{sh}\,\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\,\varphi(x)+C$
17	$\int \mathrm{ch}\,\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\,\varphi(x)+C$

Probleme rezolvate

Să se calculeze, utilizând prima metodă de schimbare de variabilă, primitivele următoarelor funcţii:

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+3},\ x\in\mathbb{R}$; 2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x},\ x\in\mathbb{R}$;

3) $f(x)=\dfrac{\cos^3 x}{\sin x},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $f(x)=\dfrac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}x},\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

5) $f(x)=2x\sin(x^2+1)e^{\cos(x^2+1)},\ x\in\mathbb{R}$; 6) $f(x)=x^2e^{x^3},\ x\in\mathbb{R}$;

7) $f(x)=\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}^3x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$; 8) $f(x)=\sin x\cos^2 x,\ x\in\mathbb{R}$;

9) $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x,\ x\in\mathbb{R}$; 10) $f(x)=\sin^3 x,\ x\in\mathbb{R}$;

11) $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$;

12) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

13) $f(x)=\dfrac{\sin^3 x}{\cos x},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; 14) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}},\ x\in(0,1)$;

15) $f(x)=x\sqrt[5]{1-x^2},\ x\in\mathbb{R}$; 16) $f(x)=\dfrac{\ln^3 x}{x},\ x>0$;

17) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$; 18) $f(x)=\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

19) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^6+1},\ x\in\mathbb{R}$; 20) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x+3},\ x\in\mathbb{R}$;

21) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^8+1}},\ x\in\mathbb{R}$; 22) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}},\ x\in(-1,1)$;

23) $f(x)=x^3\sqrt{1-x^8},\ x\in(-1,1)$; 24) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^8-1}},\ x>1$;

25) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^4 x},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; 26) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

R. 1) Fie funcţia $\varphi:\mathbb{R}\to[\frac{11}{4},\infty)$, $\varphi(x)=x^2+x+3$. Avem $\varphi'(x)=$ $=2x+1$. Deci $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+3}=h(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$. De aici $h(\varphi(x))=\dfrac{1}{\varphi(x)}$, unde $\varphi(x)=t$. Luăm acum $h:[\frac{11}{4},\infty)\to\mathbb{R}$, $h(t)=\dfrac{1}{t}$. O primitivă a acestei funcţii este $H:\left[\frac{11}{4},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $H(t)=\ln t$.

De aici

$$\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x=H(\varphi(x))+C=\ln|\varphi(x)|+C=\ln(x^2+x+3)+C.$$

Observaţie. Funcţia care schimbă variabila este φ. Punând $t=\varphi(x)=$ $=x^2+x+3$ rezultă $\mathrm{d}t=\varphi'(x)\mathrm{d}x=(2x+1)\mathrm{d}x$ şi integrala asociată este

$$\mathcal{I}_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+C.$$

Revenind la substituţie avem $\mathcal{I}=\ln(x^2+x+3)+C$. □

2) Fie $\varphi:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $\varphi(x)=\cos x$ având $\varphi'(x)=-\sin x$. Deci $f(x)=h(\varphi(x))\varphi'(x)=\dfrac{-\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}$, dă $h(\varphi(x))=-\dfrac{1}{1+\varphi^2(x)}$, iar $h:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $h(t)=-\dfrac{1}{1+t^2}$.

O primitivă a lui h este $H:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $H(t)=-\operatorname{arctg}t$.

Aşadar

$$\int f(x)\mathrm{d}x = H(\varphi(x)) + C = -\mathrm{arctg}\varphi(x) + C = -\mathrm{arctg}(\cos x) + C.\square$$

Observaţie. Dacă se notează $t = \varphi(x) = \cos x$, atunci prin diferenţiere $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x = -\sin x\mathrm{d}x$ şi integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1 = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = -\mathrm{arctg}t + C.$$

Revenind la $\mathcal{I}$ avem $\mathcal{I} = -\mathrm{arctg}(\cos x) + C$. $\square$

3) Se consideră $\varphi : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0,1)$, $\varphi(x) = \sin x$ şi deci $\varphi'(x) = \cos x$. Se scrie f sub forma:

$$f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin x} = \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x} = h(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) =$$

$$= \frac{1-\varphi^2(x)}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x), \text{ iar de aici } h(\varphi(x)) = \frac{1-\varphi^2(x)}{\varphi(x)} \text{ unde } h : (0,1) \to \mathbb{R},$$

$$h(t) = \frac{1-t^2}{t} = \frac{1}{t} - t.$$

O primitivă a lui h este $H : (0,1) \to \mathbb{R}$, $H(t) = \ln t - \frac{t^2}{2}$.

Deci $\int f(x)\mathrm{d}x = H(\varphi(x)) + C = \ln(\sin x) - \frac{\sin^2 x}{2} + C$. $\square$

Observaţie. Notăm $t = \sin x$ şi deci $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x = \cos x\mathrm{d}x$ când

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{1-t^2}{t}\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t} - t\right)\mathrm{d}t = \ln|t| - \frac{t^2}{2} + C.$$

Revenim la substituţie şi obţinem: $\mathcal{I} = \ln(\sin x) - \frac{\sin^2 x}{2} + C.\square$

În aplicaţiile următoare vom nota $t = \varphi(x)$ şi înlocuim $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ prin $\mathrm{d}t$.

4) Avem: $\mathcal{I} = \int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\mathrm{tg}x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

Notăm $\mathrm{tg}x = t$ şi deci $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$, când integrala asociată devine

$\mathcal{I}_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C$. Deci $\mathcal{I} = \ln(\mathrm{tg}x) + C.\square$

5) Se pune $t = \cos(x^2+1)$ şi deci $\mathrm{d}t = -2x\sin(x^2+1)\mathrm{d}x$. Integrala asociată este $\mathcal{I}_1 = -\int e^t\mathrm{d}t = -e^t + C$. Deci $\mathcal{I} = -e^{\cos(x^2+1)} + C$. $\square$

6) Notăm $t = x^3$ când $\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$ şi deci integrala asociată este:

$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{3}\int e^t\mathrm{d}t = \frac{1}{3}e^t + C$. Aşadar $\mathcal{I} = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$. $\square$

7) Avem:

$$\mathcal{I} = \int (\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^3 x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}x(1 + \mathrm{tg}^2 x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}x \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

Notăm $t = \mathrm{tg}x$ şi deci $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ când integrala asociată este:

$\mathcal{I}_1 = \int t\mathrm{d}t = \dfrac{t^2}{2} + C$. Deci $\mathcal{I} = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + C$.□

8) Se pune $t = \cos x$ când $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$. Deci integrala asociată este:

$\mathcal{I}_1 = -\int t^2 \mathrm{d}t = -\dfrac{t^3}{3} + C$. În fine $\mathcal{I} = -\dfrac{\cos^3 x}{3} + C$. □

9) Se substituie $t = \cos x$ şi deci $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$. Funcţia se aduce la forma: $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)\cos^2 \sin x$.
Acum integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1 = -\int (1 - t^2)t^2 \mathrm{d}t = -\int (t^2 - t^4)\mathrm{d}t = -\int t^2 \mathrm{d}t + \int t^4 \mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C. \text{ Deci } \mathcal{I} = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.\square$$

10) Se scrie f sub forma: $f(x) = \sin x \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$.
Acum se substituie $t = \cos x$ şi deci $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$. Integrala asociată este: $\mathcal{I}_1 = -\int (1 - t^2)\mathrm{d}t = -\int \mathrm{d}t + \int t^2 \mathrm{d}t = -t + \dfrac{t^3}{3} + C$.

Aşadar $\mathcal{I} = \dfrac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.\square$

11) Se prelucrează f sub forma

$f(x) = \dfrac{\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$ şi se notează $t = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Se obţine $\mathcal{I}_1 = \int \dfrac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C$ şi deci $\mathcal{I} = \ln \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + C$. □

12) Se ia f sub forma: $f(x) = \mathrm{tg}^2 x(1 + \mathrm{tg}^2 x) = \mathrm{tg}^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Se notează $t = \mathrm{tg}x$ când $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Integrala asociată devine:

$\mathcal{I}_1 = \int t^2 \mathrm{d}t = \dfrac{t^3}{3} + C$, iar $\mathcal{I} = \dfrac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + C.\square$

13) Se aduce f la forma: $f(x) = \dfrac{\sin^2 x \sin x}{\cos x} = \dfrac{(1 - \cos^2 x)\sin x}{\cos x}$,

şi se notează $t = \cos x$ când $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$. Integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1 = -\int \frac{1-t^2}{t}\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int t\mathrm{d}t = -\ln|t| + \frac{t^2}{2} + \mathcal{C}.$$

Deci $\mathcal{I} = -\ln(\cos x) + \dfrac{\cos^2 x}{2} + \mathcal{C}$.□

14) Notăm $t = x\sqrt{x}$ şi de aici $\mathrm{d}t = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\mathrm{d}x$. Integrala asociată este:

$\dfrac{2}{3}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{3}\arcsin t + \mathcal{C}$. Deci $\mathcal{I} = \dfrac{2}{3}\arcsin(x\sqrt{x}) + \mathcal{C}$. □

15) Punem $t = 1 - x^2$ şi avem $\mathrm{d}t = -2x\mathrm{d}x$. Acum

$$\mathcal{I}_1 = -\frac{1}{2}\int \sqrt[5]{t}\mathrm{d}t = -\frac{5}{12}t\sqrt[5]{t} + \mathcal{C}.$$

Deci $\mathcal{I} = -\dfrac{5}{12}(1-x^2)\sqrt[5]{1-x^2} + \mathcal{C}$. □

16) Se ia $t = \ln x$ când $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Avem: $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int t^3\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + \mathcal{C}$.

Deci $\mathcal{I} = \dfrac{\ln^4 x}{4} + \mathcal{C}$.□

17) Punem $t = \mathrm{arctg}x$ şi deci $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Integrala asociată este:

$\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int t^5\mathrm{d}t = \frac{t^6}{6} + \mathcal{C}$. Deci $\mathcal{I} = \dfrac{\mathrm{arctg}^6 x}{6} + \mathcal{C}$. □

18) Se pune $t = \mathrm{tg}x$ când $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Avem: $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int e^t\mathrm{d}t = e^t + \mathcal{C}$.

Deci $\mathcal{I} = e^{\mathrm{tg}x} + \mathcal{C}$.□

19) Notăm $t = x^3$ când $\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$. Deci

$\mathcal{I}_1 = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}t + \mathcal{C}$. De aici $\mathcal{I} = \dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3) + \mathcal{C}$. □

20) Punem $t = \sin^2 x$ şi de aici $\mathrm{d}t = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$. Aşadar

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}.$$

Deci $\mathcal{I} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{3}}\right) + \mathcal{C}$.□

21) Din $t = x^4$ rezultă $\mathrm{d}t = 4x^3\mathrm{d}x$ şi integrala asociată este:

$\mathcal{I}_1 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{4}\ln(t + \sqrt{t^2+1}) + \mathcal{C}$. Deci

$\mathcal{I} = \dfrac{1}{4}\ln(x^4 + \sqrt{x^8+1}) + \mathcal{C}$.□

22) Se pune $t = x^4$ şi deci $\mathrm{d}t = 4x^3\mathrm{d}x$. Integrala asociată este:
$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\arcsin t + C$. De aici $\mathcal{I} = \frac{1}{4}\arcsin(x^4) + C$. □

23) Se face $t = x^4$. Avem $\mathcal{I}_1 = \frac{1}{4}\int \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ etc.

24) Se pune $t = x^4$.

25) Avem $\mathcal{I} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int (1+\mathrm{tg}^2 x)\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.
Se pune $t = \mathrm{tg}x$ şi deci $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Integrala asociată este:
$\mathcal{I}_1 = \int (1+t^2)\mathrm{d}t = t + \frac{t^3}{3} + C$. De aici $\mathcal{I} = \mathrm{tg}x + \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + C$. □

26) $\mathcal{I} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Notăm $t = \sin x$ şi rezultă
$\mathcal{I}_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$. □

Probleme propuse

Să se calculeze, utilizând prima metodă de schimbare de variabilă, următoarele integrale nedefinite:

1) $\int (2x-1)^9\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $\int x(2x-1)^9\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$;

3) $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{(x-1)^{10}}$, $x > 1$; 4) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$;

5) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^3+1}$, $x > -1$; 6) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$;

7) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^6+4}$, $x \in \mathbb{R}$; 8) $\int \frac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x(3+e^{-x})}$, $x \in \mathbb{R}$; 10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}\mathrm{d}x$, $x > 0$;

11) $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; 12) $\int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{e^x-1}$, $x > 0$;

13) $\int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{e^x+1}$, $x > 0$; 14) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$, $x \geq 1$;

15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$, $x > 1$; 16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)^3}$, $x > 1$;

17) $\int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}$, $x > e$; 18) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$, $x \in (1, e)$;

19) $\int \frac{dx}{x\ln(2x)}$, $x > \frac{1}{2}$; 20) $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 2)}$, $x > e^2$;

21) $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 5)}$, $x > 0$; 22) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}}$, $x > 0$;

23) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$, $x \in (e^{-2}, e^2)$; 24) $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

25) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$, $x \in \mathbb{R}$; 26) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 4}$, $x \in \mathbb{R}$;

27) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$; 28) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

29) $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 x - 4}$, $x \in \mathbb{R}$; 30) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{4-\sin^4 x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

31) $\int \frac{dx}{(1+x^2)(\mathrm{arctg}x + 3)}$, $x \in \mathbb{R}$; 32) $\int \frac{dx}{(1+x^2)(\mathrm{arctg}^2 x + 4)}$, $x \in \mathbb{R}$;

33) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\mathrm{arctg}^2 x + 5}}$, $x \in \mathbb{R}$;

34) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4-\mathrm{arctg}^2 x}}$, $x \in (0, 1)$;

35) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\mathrm{arctg}x}}$, $x > 0$; 36) $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$;

37) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$, $x \in (0, 1)$; 38) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$, $x \in (0, 1)$;

39) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin^2 x + 1}}$, $x \in (-1, 1)$;

40) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\arcsin^2 x}}$, $x \in (-1, 1)$;

41) $\int \frac{(x - \sqrt{\mathrm{arctg}x})dx}{1+x^2}$, $x > 0$; 42) $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$;

43) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 16}}$, $x > 2$; 44) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$, $x > 0$;

45) $\int \frac{x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $x \in (-1, 1)$;

46) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(x^2+1)+1}{x^2+1}\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R};$

47)* $\int \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$ 48) $\int \frac{\arcsin x \mathrm{d}x}{x^2},\ x \in (0,1);$

49) $\int x^5\sqrt{x^2-4}\mathrm{d}x,\ x > 2;$ 50) $\int x^3\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}.$

51) $\int \frac{\ln(1+e^x) - x}{1+e^x}\mathrm{d}x.$

A doua metodă de schimbare de variabilă (facultativ)

Teoremă. Fie I, J intervale din $\mathbb{R}$ şi $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ două funcţii cu următoarele proprietăţi:
1) φ este bijectivă, derivabilă cu $\varphi'(x) \neq 0, \forall x \in I$;
2) funcţia $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive (fie H o primitivă a sa).
Atunci
a) funcţia f admite primitive;
b) funcţia $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f, adică

$$\int f(x)\mathrm{d}x = (H \circ \varphi^{-1})(x) + C.$$

Demonstraţie. Din 1) rezultă că φ^{-1} este derivabilă pe J. Cum H este o primitivă a lui h, rezultă H derivabilă pe I şi $H' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Pentru ca $H \circ \varphi^{-1}$ să fie o primitivă pentru f trebuie ca $(H \circ \varphi^{-1})' = f$. Mai întâi este clar că $H \circ \varphi^{-1}$ este derivabilă pe J (compunere de funcţii derivabile).
Avem: $(H \circ \varphi^{-1})'(x) = H'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) =$
$= (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(x) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} =$
$= f(x),\ x \in J.$

Observaţii. 1. Se spune că φ^{-1} este funcţia care schimbă variabila. Înlocuind formal $x = \varphi(t)$ şi $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ se trece de la integrala $\mathcal{I} = \int f(x)\mathrm{d}x$ la integrala asociată $\mathcal{I}_1 = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$

2. În prima metodă se notează cu t o expresie ce conţine pe x, după care se calculează integrala asociată $\mathcal{I}_1$. În a doua metodă a substituţiei se pune x egal cu o expresie de t şi se trece la integrala asociată $\mathcal{I}_1$.

3. De remarcat că în cele două metode se face o substituţie în urma căreia se obţine o integrală asociată $\mathcal{I}_1$ mai uşor de calculat.

Probleme rezolvate

Să se calculeze, utilizând a doua metodă de schimbare de variabilă, primitivele următoarelor funcţii:

1) $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in(-a,a)$, $a>0$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$, $x>1$;

3) $f(x)=\cos^2\sqrt{x}$, $x>0$; 4) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$, $x>0$.

R. 1) Alegem $\varphi:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to(-a,a)$, $\varphi(t)=a\sin t$, evident bijectivă (cu inversa $\varphi^{-1}(x)=\arcsin\dfrac{x}{a}$), derivabilă şi $\varphi'(t)=a\cos t\neq 0$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (deci se verifică cerinţa 1) din teoremă). Trebuie găsită o primitivă H pentru
$h(t)=(f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t=a^2\cos^2 t$.
Avem: $H\in\int h(t)\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t=a^2\int\dfrac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=$
$=\dfrac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$. Deci $\int f(x)\mathrm{d}x=H(\varphi^{-1}(x))+C=$
$=\dfrac{a^2}{2}\left[\arcsin\dfrac{x}{a}+\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)}\right]+C=$
$=\dfrac{a^2}{2}\left[\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{a}\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\right]+C=\dfrac{1}{2}\left[a^2\arcsin\dfrac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right]+C$,
rezultat găsit la integrarea prin părţi. □

Observaţie. Dacă notăm formal $x=a\sin t$ cu $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$, iar de aici $\sin t=\dfrac{x}{a}$, sau $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$, atunci integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cdot\cos t)+C.$$

Revenind la substituţie găsim

$$\mathcal{I}=\frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a}+\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)}\right]+C=$$
$$=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C.\ \square$$

2) Alegem $\varphi:(1,\infty)\to(1,\infty)$, $\varphi(t)=t^6$, care este o funcţie bijectivă (cu inversa $\varphi^{-1}(x)=\sqrt[6]{x}=t$), derivabilă pe $(1,\infty)$ şi $\varphi'(t)=6t^5\neq 0$, $t>1$. Să construim primitiva H pentru funcţia $h(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)=$

$= \frac{6t^5}{t^3-t^2} = \frac{6t^3}{t-1}$. Deci $H \in \int h(t)\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3\mathrm{d}t}{t-1} =$

$= 6\int \frac{t^3-1+1}{t-1} = 6\int \frac{(t-1)(t^2+t+1)+1}{t-1}\mathrm{d}t =$

$= 6\int \left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = 2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C.$

Acum $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln(\sqrt[6]{x}-1)+C.$ □

Observaţie. Să remarcăm că în structura funcţiei apar $\sqrt{x}$ şi $\sqrt[3]{x}$ (deci radicali de ordine diferite din aceeaşi expresie, aici x). Atunci se face substituţia $x = t^6$, unde exponentul 6 reprezintă cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor. Lucrând formal avem: $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$, $t = \sqrt[6]{x}$. Integrala asociată este:

$\mathcal{I}_1 = 6\int \frac{t^5\mathrm{d}t}{t^3-t^2} = 6\int \frac{t^3\mathrm{d}t}{t-1} = 2t^3+3t^2+6t+6\ln(t-1)+C.$

Revenind la substituţie avem:

$\mathcal{I} = 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln(\sqrt[6]{x}-1)+C.$ □

3) Substituim $x = t^2$ şi deci $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$, iar $t = \sqrt{x}$. Integrala asociată este: $\mathcal{I}_1 = \int(\cos^2 t)2t\mathrm{d}t = 2\int t\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \int(t+t\cos 2t)\mathrm{d}t =$

$= \frac{t^2}{2} + \int t\cos 2t\mathrm{d}t$, ultima integrală calculându-se prin părţi. Pentru aceasta punem $f(t) = t$, $g'(t) = \cos 2t$. De aici $f'(t) = 1$, $g(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$.

Avem: $\int t\cos 2t\mathrm{d}t = \frac{t\sin 2t}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2t\mathrm{d}t = \frac{t\sin 2t}{2} + \frac{1}{4}\cos 2t + C.$

Acum: $\mathcal{I}_1 = \frac{t^2}{2} + \frac{t\sin 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{4} + C$. Revenind la substituţie se obţine:

$\mathcal{I} = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}{2} + \frac{\cos 2\sqrt{x}}{4} + C.$ □

4) Se pune $x = \ln t$ şi deci $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$, $t = e^x$. Integrala asociată este:

$\mathcal{I}_1 = \int \frac{t^2}{1+t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t} = \int \frac{(1+t)-1}{1+t}\mathrm{d}t = \int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t =$

$= t - \ln|1+t| + C.$

Revenim la substituţie şi obţinem: $\mathcal{I} = e^x - \ln(1+e^x) + C.$□

5) Se substituie $x = t^2-1$. De aici $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$, $t = \sqrt{x+1}$. Integrala asociată este: $\mathcal{I}_1 = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$

Deci $\mathcal{I} = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + C.$

Probleme propuse

Să se calculeze, utilizând a doua metodă de schimbare de variabilă şi substituţiile indicate, primitivele următoarelor funcţii:

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$, $x\geq 0$, $x=t^2$; 2) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}$, $x\geq 0$, $x=t^2$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x>1$, $x=\dfrac{1}{t}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$, $x\in(0,2)$, $x=2\sin t$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$, $x>1$, $x=\dfrac{1}{t}$;

6) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-2}}$, $x>\sqrt{2}$,$x=\dfrac{1}{t}$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $x>0$, $x=t^6$;

8) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$, $x=-\ln t$;

9) $f(x)=x^2\sqrt{4-x^2}$, $x\in(-2,2)$, $x=2\sin t$;

10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$, $x>0$, $x=2\mathrm{tg}t$;

11) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x\in(0,1)$, $x=\sin^2 t$.

12) $f(x)=\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+x}}}_{n \text{ radicali}}$, $x\in(0,1)$, $x=2\cos t$.

Integrarea funcţiilor raţionale

Definiţie. O funcţie $f:I\to\mathbb{R}$, I interval, se numeşte **raţională** dacă $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, unde P, Q sunt funcţii polinomiale cu coeficienţi reali şi $Q(x)\neq 0$, $\forall x\in I$.

Descompunerea funcţiilor raţionale în funcţii raţionale simple

Definiţie. O funcţie raţională se numeşte **simplă** dacă are una din formele:

1) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (funcţia polinomială);

2) $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in I \subset (-\infty, a)$ sau $I \subset (a, \infty)$

3) $f(x) = \dfrac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $b^2 - 4c < 0$.

Următoarea teoremă de algebră este fundamentală pentru integrarea funcţiilor raţionale.

Teoremă. Orice funcţie raţională poate fi reprezentată sub forma unei sume finite de funcţii raţionale simple. Mai precis, dacă

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_p)^{\alpha_p}(x^2+b_1x+ \\ +c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}, \text{ unde } b_i^2 - 4c_i < 0, i = \overline{1,q},$$

atunci $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} =$

$$= L(x) + \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{A_k^1}{x-a_k} + \frac{A_k^2}{(x-a_k)^2} + \cdots + \frac{A_k^{\alpha_k}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}\right] + \\ + \sum_{k=1}^{q}\left[\frac{B_k^1 x + C_k^1}{x^2+b_kx+c_k} + \cdots + \frac{B_k^{\beta_k}x + C_k^{\beta_k}}{(x^2+b_kx+c_k)^{\beta_k}}\right], \qquad (1)$$

unde L este o funcţie polinomială cu coeficienţi reali, iar $p, q \in \mathbb{N}^*$, a_k, b_k, c_k, A_k^i, B_k^i, C_k^i sunt numere reale, $b_k^2 - 4c_k < 0$.

Observaţie. Problema care se pune în cazul în care Q este descompus în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ (se ştie din algebră că factorii ireductibili peste $\mathbb{R}$ sunt polinoamele de gradul întâi $X - a$ şi cele de gradul doi $X^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $b^2 - 4c < 0$) este de a determina coeficienţii A_k^i, B_k^i, C_k^i ce apar în membrul drept al egalităţii (1).
Dacă grad $P \geq$ grad Q, atunci se face împărţirea lui P la Q conform teoremei împărţirii cu rest când obţinem
$P = LQ + R$, unde grad $R <$ grad Q şi deci $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

Acum pentru $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ avem descompunerea în funcţii raţionale simple (de formele 2) şi 3)) şi corespunde celor două sume din membrul drept al

egalităţii (1). În egalitatea astfel obţinută se aduce, în membrul drept, la acelaşi numitor. Numitorul comun este Q. Dacă se elimină Q din ambii membri se ajunge la egalitatea a două polinoame, iar de aici la un sistem de ecuaţii în care necunoscutele sunt coeficienţii A_k^i, B_k^i, C_k^i. Această metodă de a determina coeficienţii A_k^i, B_k^i, C_k^i se numeşte **metoda coeficienţilor nedeterminaţi.**

Probleme rezolvate

Să se descompună în funcţii raţionale simple următoarele funcţii raţionale:

a) **Numitorul are rădăcini reale simple**

1) $f(x) = \dfrac{2x^2+6x+6}{(x+1)(x^2+5x+6)}$, $x \neq -3$, $x \neq -2$, $x \neq -1$;

2) $f(x) = \dfrac{2x^3+x^2+x+1}{2x^2-x-1}$, $x \neq -\dfrac{1}{2}$, $x \neq 1$.

R. 1) Descompunem numitorul în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$. Avem: $Q(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$. Atunci descompunerea lui f în funcţii raţionale simple are forma:

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}. \qquad (*)$$

Aducând (în dreapta) la acelaşi numitor şi apoi eliminând numitorul rezultă egalitatea

$$2x^2+6x+6 = A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2), \qquad (1)$$

sau

$$2x^2+6x+6 = (A+B+C)x^2+(5A+4B+3C)x+6A+3B+2C.$$

De aici, prin identificarea coeficienţilor (de la aceleaşi puteri ale lui x) rezultă sistemul:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 2 = A+B+C \\ x & 6 = 5A+4B+3C \\ x^0 & 6 = 6A+3B+2C \end{array}$$

Rezolvând acest sistem găsim $A = 1$, $B = -2$, $C = 3$.

Deci $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{3}{x+3}$. □

Observaţie. Dacă în (1) se trece la limită după $x \to -1$, ceea ce revine la a înlocui pe x cu -1, rezultă $A = 1$. Analog pentru $x = -2$ se găseşte $B = -2$, iar pentru $x = -3$ avem $C = 3$.

Deci în acest caz, al rădăcinilor simple, dacă dorim să-l aflăm pe A, atunci se înmulţeşte egalitatea $(*)$ cu numitorul fracţiei în care apare A. În membrul stâng se poate simplifica prin $x+1$ $(x \neq -1)$. Apoi

în această egalitate se trece la limită după $x \to -1$. În stânga găsim 1, iar în dreapta doar A deoarece termenii care conţin pe B şi C fiind înmulţiţi cu $x+1$, prin trecerea la limită după $x \to -1$, aceştia devin zero. Analog pentru a afla pe B se înmulţeşte $(*)$ cu $x+2$ şi se trece la limită după $x \to -2$, etc.˘

2) Observăm că gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului. Se face împărţirea şi găsim:

$2x^3+x^2+x+1 = (x+1)(2x^2-x-1)+3x+2.$

Deci $f(x) = \dfrac{(x+1)(2x^2-x-1)+3x+2}{2x^2-x-1} = x+1+\dfrac{3x+2}{2x^2-x-1}.$

Acum funcţia raţională $\dfrac{3x+2}{2x^2-x-1}$ se descompune în funcţii raţionale simple. Să observăm că $2x^2-x-1 = (x-1)(2x+1)$ şi deci

$\dfrac{3x+2}{2x^2-x-1} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{2x+1}$, iar de aici $3x+2 = (2A+B)x+A-B.$

Se obţine sistemul $2A+B=3$, $A-B=2$ cu soluţia $A=\dfrac{5}{3}$, $B=-\dfrac{1}{3}$.

Aşadar $f(x) = x+1+\dfrac{5}{3(x-1)}-\dfrac{1}{3(2x+1)}$. □

b) **Numitorul are rădăcini reale multiple**

1) $f(x) = \dfrac{4x+1}{(x+1)^3}$, $x \neq -1$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x \neq \pm 1$.

R. 1) **Metoda întâi.** Se scrie f sub forma:

$f(x) = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{(x+1)^3}$, iar de aici

$4x+1 = A(x+1)^2+B(x+1)+C,$ (1) sau

$4x+1 = Ax^2+(2A+B)x+A+B+C.$

Deci $A=0$, $2A+B=4$, $A+B+C=1$, când găsim $A=0$, $B=4$, $C=-3$. Prin urmare $f(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2}-\dfrac{3}{(x+1)^3}$. □

Metoda a doua. Dacă în (1) se face $x=-1$ rezultă $C=-3$. Se derivează (1) şi rezultă $4 = 2A(x+1)+B$, (2) iar aici facem $x=-1$ când avem $B=4$.

Se derivează (2) şi se face $x=-1$, când găsim $A=0$.

Metoda a treia. Punem $x+1=y$ şi deci $x=y-1$.

Deci $f(y-1) = \dfrac{4y-3}{y^3} = \dfrac{4}{y^2}-\dfrac{3}{y^3}$, iar de aici, revenim la substituţie,

$f(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2}-\dfrac{3}{(x+1)^3}$. □

2) Are loc descompunerea

$f(x)=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{(x+1)^2}$, iar de aici

$x^2+x+2=A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-1)^2+D(x-1)^2$, (1).

Se face $x=-1$ şi apoi $x=1$, când găsim $2=4D$ şi respectiv $4=4B$.

Deci $D=\dfrac{1}{2}$, $B=1$. Se derivează (1) şi rezultă

$2x+1=A(x+1)^2+2A(x^2-1)+2B(x+1)+C(x-1)^2+2C(x^2-1)+$

$+2D(x-1)$, şi se face aici din nou $x=-1$ şi apoi $x=1$.

Găsim $-1=4C-4D$, $3=4A+4B$. De aici $A=-\dfrac{1}{4}$, $C=\dfrac{1}{4}$.

Deci $f(x)=-\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}$. □

Altfel. Din (1) rezultă un sistem în A, B, C, D din egalitatea celor două funcţii polinomiale.

c) **Numitorul are rădăcini complexe simple.**

$$f(x)=\frac{2x^3-3x^2+2x}{(x^2+4)(x^2+1)}.$$

R. Avem: $f(x)=\dfrac{Ax+B}{x^2+4}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ sau

$2x^3-3x^2+2x=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+4C)x+B+4D$. (1)

De aici rezultă sistemul:

x^3	$A+C=2$
x^2	$B+D=-3$
x	$A+4C=2$
x^0	$B+4D=0$,

cu soluţia $A=2$, $B=-4$, $C=0$, $D=1$. Deci $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+4}+\dfrac{1}{x^2+1}$. □

Altfel. Să observăm că numitorul are rădăcinile complexe $\pm i$, $\pm 2i$. În egalitatea (1) se face $x=i$ şi rezultă $Ci+D=1$. De aici (egalitatea a două numere complexe) se obţine $C=0$, $D=1$.

Tot în (1) se pune $x=2i$ şi avem $4i-4=2Ai+B$. Din această egalitate se deduce $A=2$, $B=-4$. □

d) **Numitorul are rădăcini complexe multiple.**

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

R. Funcţia se scrie descompusă în funcţii raţionale simple astfel:

$f(x)=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$, iar de aici
$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2)$.
Egalând coeficienţii de la aceleaşi puteri ale lui x din cei doi membri rezultă sistemul:

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+B=0 \\ x^3 & -2B+C=0 \\ x^2 & 2A+B-2C+D=2 \\ x & -2B+C-2D+E=2 \\ x^0 & A-2C-2E=13, \end{array}$$

cu soluţia $A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4$.
Deci $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x+2}{x^2+1}-\dfrac{3x+4}{(x^2+1)^2}$. □

Probleme propuse

Să se descompună în funcţii raţionale simple următoarele funcţii raţionale:

1) $f(x)=\dfrac{3x+5}{(x-3)(x^2-3x+2)}$, $x\neq 1,2,3$;

2) $f(x)=\dfrac{3x^2+12x+11}{x^3+6x^2+11x+6}$, $x\neq -1,-2,-3$;

3) $f(x)=\dfrac{2x^2-6}{x^3+2x^2-3x}$; $x\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$;

4) $f(x)=\dfrac{x^4-3x^3-3x^2+10}{(x+1)(x^2-2x-3)}$, $x\neq -1,\ x\neq 3$;

5) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+5}{(x-1)^4}$, $x\neq 1$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+1}$;

7) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$, $x\neq -1$; 8) $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}$, $x\neq 0$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{x^3(x^2+1)^2}$, $x\neq 0$; 10) $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2+x+1)^2}$, $x\neq 0$;

11) $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2}$, $x\neq -1$.

Integrarea funcţiilor raţionale simple

Am văzut că orice funcţie raţională se scrie ca o sumă finită de funcţii raţionale simple. Deci integrarea unei funcţii raţionale se reduce la integrarea funcţiilor raţionale simple.

1) Dacă $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C.$$

2) Dacă $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x > a$ sau $x < a$, atunci se consideră cazurile: **2.1.)** $n = 1$. Avem

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a| + C = \begin{cases} \ln(x-a) + C, & x > a \\ \ln(a-x) + C, & x < a. \end{cases}$$

Exemple. Să se calculeze

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$, $x > 1$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$, $x < -1$; c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x+1}$, $x > -\frac{1}{4}$.

R. a) Avem $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \ln|x-1| + C = \ln(x-1) + C$.□

b) Acum $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \ln|x+1| + C = \ln(-x-1) + C$.□

c) Se scrie integrala sub forma: $\displaystyle\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\ln\left(x+\frac{1}{4}\right) + C$.□

2.2.) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, găsim:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n}\mathrm{d}x = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, \text{ dacă } x \in I, \text{ unde } I \subset (a,\infty) \text{ sau } I \subset (-\infty, a).$$

Exemple. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}$, $x > 1$; b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(-x+1)^5}$, $x < -1$;

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(-x+1)^4}$, $x > 1$; d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x+1)^3}$, $x > -\frac{1}{3}$.

R. a) Scriem integrala sub forma:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} = \int (x-1)^{-3}\mathrm{d}x = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C.\ \square$$

b) Avem $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(-x+1)^5} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^5} = \frac{1}{4(x-1)^4} + C$.□

c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(-x+1)^4} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4} = -\frac{1}{3(x-1)^3} + C.\square$

d) Se scrie integrala sub forma

$$\frac{1}{3^3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{27}\left(-\frac{1}{2\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}\right) + C = -\frac{1}{6(3x+1)^2} + C. \ \square$$

Altfel. Dacă se notează $3x+1=t$, atunci integrala asociată este $\mathcal{I}_1 = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{6t^2} + C$. Prin urmare $\mathcal{I} = -\frac{1}{6(3x+1)^2} + C. \ \square$

3) Dacă $f(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $b^2-4c<0$, atunci se analizează cazurile:

3.1.) $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a \neq 0$. Avem $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

Observaţie. Dacă $f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$, atunci $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+a^2} =$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$.

Exemple. Să se calculeze:

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}$, $x \in \mathbb{R}$.

R. a) Se obţine $(a=2)$ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.\square$

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

3.2.) $f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Pentru $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ vom da o formulă de recurenţă.

Avem: $I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}\right] = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}\right]$.

Pentru calculul integralei din paranteza dreaptă se aplică integrarea prin părţi, când avem:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^n} = \int x \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} x +$$

$$+ \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Deci $I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}\right]$.

Observaţie. Dacă $f(x) = \frac{x}{(x^2+a^2)^n}$, atunci

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{-2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Exemplu. Să se calculeze $\int \frac{dx}{(x^2+4)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

R. Fie $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+4)^n}$. Avem:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{(4+x^2)-x^2}{(x^2+4)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[I_1 - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}\right] = \frac{1}{4}\left[I_1 - \int x \frac{x}{(x^2+4)^2} dx\right].$$

Pentru integrala din paranteza dreaptă punem (pentru a aplica integrarea prin părţi) $f(x) = x$, $g'(x) = \frac{x}{(x^2+4)^2}$, iar de aici $f'(x) = 1$, $g(x) = -\frac{1}{2(x^2+4)}$. Obţinem:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx = -\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4} = -\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{2} I_1.$$

Aşadar, $I_2 = \frac{1}{4}\left[I_1 + \frac{x}{2(x^2+4)} - \frac{1}{2} I_1\right] = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{8} I_1$, unde

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

În fine, $I_2 = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.

3.3.) Dacă $f(x) = \frac{1}{x^2+bx+c}$, $b^2 - 4c < 0$, atunci se scrie x^2+bx+c ca sumă de pătrate sub forma

$$x^2 + bx + c = x^2 + 2\frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4} + c - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c-b^2}{4} =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}\right)^2.$$

În acest caz $I = \int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} + C.$$

Exemple. Să se calculeze integralele:

a) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{3x^2+5x+3}$, $x \in \mathbb{R}$.

R. a) Se scrie integrala sub forma

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

b) În acest caz avem

$$\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\dfrac{5}{3}x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\dfrac{5}{6}\right)^2 + \dfrac{11}{36}} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\dfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} =$$

$$= \frac{6}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x+5}{\sqrt{11}} + C = \frac{2\sqrt{11}}{11}\operatorname{arctg}\frac{6x+5}{\sqrt{11}} + C. \square$$

Observaţie. Dacă numitorul funcţiei $f(x)$ este de forma $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^n$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ cu $\alpha \neq 1$, atunci se forţează factor α^n şi avem

$\alpha^n\left(x^2+\dfrac{\beta}{\alpha}x+\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^n = \alpha^n(x^2+bx+c)^n$, unde $b = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $c = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, $b^2-4c < 0$.

În cazul de mai sus (b) avem $\alpha = 3$.

3.4.) Dacă $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+bx+c)^n}$, $b^2-4c<0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$,

atunci se pune f sub forma $f(x) = \dfrac{1}{\left[\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2\right]^n}$

şi se substituie $x+\dfrac{b}{2} = t$, ajungând în final la integrala de forma 3.2.).

3.5.) Dacă $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+bx+c)^n}$, $b^2-4c<0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$,

atunci se prelucrează f sub forma

$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}-\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+bx+c)^n}$, când

$$\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}-\frac{b}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+bx+c)^n},$$

ultima integrală fiind de tipul 3.4.).

Probleme rezolvate

Să se calculeze integralele următoarelor funcţii:

1) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$, $x>0$; 2) $f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{x^5}$, $x>0$;

3) $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^{10}}$, $x<1$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$;

5) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$; 6) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$;

7) $f(x)=\frac{1}{4x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$; 8) $f(x)=\frac{x-1}{4x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$;

9) $f(x)=\frac{1}{x^2-16}$, $x>4$; 10) $f(x)=\frac{3x}{x^2-16}$, $x<-4$;

11) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-16}$, $x>4$; 12) $f(x)=\frac{-x+1}{9x^2-16}$, $x>\frac{4}{3}$;

13) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}+\frac{2}{3(x^2-9)}$, $x>3$;

14) $f(x)=\frac{-5}{x^2+3x+2}+\frac{3}{x^2+x+1}$, $x>-1$;

15) $f(x)=-\frac{1}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-3x+2}$, $x>2$.

R. 1) Avem $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=$

$=\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C=\ln x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$. □

2) Se scrie f sub forma:

$f(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}$ şi $\int f(x)\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3}+3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5}=$

$=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{4x^4}+C$. □

3) Se notează $x-1=t$ şi integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1=\int\frac{(t+1)^3}{t^{10}}\mathrm{d}t=\int\frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^{10}}\mathrm{d}t=$$

$$= \int (t^{-7} + 3t^{-8} + 3t^{-9} + t^{-10})\mathrm{d}t = -\frac{1}{6t^6} - \frac{3}{7t^7} - \frac{3}{8t^8} - \frac{1}{9t^9} + C.$$

Deci $\mathcal{I} = -\dfrac{1}{6(x-1)^6} - \dfrac{3}{7(x-1)^7} - \dfrac{3}{8(x-1)^8} - \dfrac{1}{9(x-1)^9} + C.\square$

4) $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + C.\square$

5) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4)'\mathrm{d}x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C.\ \square$

6) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\mathrm{d}x}{x^2+4} = \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+4} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + C.$

7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+9} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\frac{9}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\frac{3}{2}} + C =$

$= \dfrac{1}{6}\mathrm{arctg}\dfrac{2x}{3} + C.\ \square$

8) $\displaystyle\int \frac{(x-1)\mathrm{d}x}{4x^2+9} = \int \frac{x\mathrm{d}x}{4x^2+9} - \int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+9} = \frac{1}{8}\int \frac{8x\mathrm{d}x}{4x^2+9} -$

$-\dfrac{1}{4}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{8}\ln(4x^2+9) - \frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{2x}{3} + C.\square$

9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-16} = \frac{1}{8}\ln\frac{x-4}{x+4} + C.\square$

10) $\displaystyle\int \frac{3x\mathrm{d}x}{x^2-16} = \frac{3}{2}\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2-16} = \frac{3}{2}\ln x^2 - 16 + C = \frac{3}{2}\ln(x^2-16) + C.$

11) $\displaystyle\int \frac{(x-3)\mathrm{d}x}{x^2-16} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2-16} - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-16} = \frac{1}{2}\ln(x^2-16) -$

$-\dfrac{3}{8}\ln\dfrac{x-4}{x+4} + C.\square$

12) $\displaystyle\int \frac{(-x+1)\mathrm{d}x}{9x^2-16} = \int \frac{-x\mathrm{d}x}{9x^2-16} + \int \frac{\mathrm{d}x}{9x^2-16} = \frac{-1}{18}\int \frac{18x\mathrm{d}x}{9x^2-16} +$

$+\dfrac{1}{9}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{1}{18}\ln(9x^2-16) + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{8}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{4}{3}}{x+\frac{4}{3}}\right| + C =$

$= -\dfrac{1}{18}\ln(9x^2-16) + \dfrac{1}{24}\ln\left(\dfrac{3x-4}{3x+4}\right) + C.\square$

13) $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-9} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) +$

$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{9}\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)+C.\square$$

14) $\int f(x)\mathrm{d}x=-5\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}+3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}.$

Pentru prima integrală $x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Deci

$$\mathcal{I}_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)+C.$$

Pentru a doua integrală $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ şi deci

$$\mathcal{I}_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

În final $\mathcal{I}=-5\ln\frac{x+1}{x+2}+2\sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\square$

15) Avem: $\int f(x)\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}+6\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$

$$=-\frac{1}{4}\ln\frac{x-2}{x+2}+6\ln\frac{x-2}{x-1}+C.\square$$

Probleme propuse

Să se calculeze integralele următoarelor funcţii:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$, $x\in\mathbb{R}$;

3) $f(x)=\frac{3}{x^2+3}+\frac{6}{x^2-3}$, $x>\sqrt{3}$; 4) $f(x)=\frac{x}{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$;

5) $f(x)=\frac{x-2}{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$; 6) $f(x)=\frac{x^2}{x^6+4}$, $x\in\mathbb{R}$;

7) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^6-3}$, $x\geq 2$; 8) $f(x)=\dfrac{5x-2}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$;

9) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$; 10) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+13}$, $x\in\mathbb{R}$;

11) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+5}$, $x\in\mathbb{R}$; 12) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$;

13) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+29}$, $x\in\mathbb{R}$; 14) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+10}$, $x\in\mathbb{R}$;

15) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Integrarea funcţiilor raţionale oarecare

Probleme rezolvate

Să se integreze următoarele funcţii raţionale pentru care **numitorul are rădăcini reale simple**:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x+4}$, $x>-4$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$, $x\in(-1,0)$;

3) $f(x)=\dfrac{x-4}{(x-2)(x-3)}$, $x<2$; 4) $f(x)=\dfrac{2x+7}{x^2+x-2}$, $x>1$;

5) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2-x}$, $x>1$.

R. 1) Avem: $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{(x+4)-4}{x+4}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{4}{x+4}\right)\mathrm{d}x=$

$=\displaystyle\int\mathrm{d}x-4\int\frac{\mathrm{d}x}{x+4}=x-4\ln|x+4|+C=x-4\ln(x+4)+C$. □

2) Se descompune funcţia în funcţii raţionale simple când avem:

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}.$$

De aici $1=(A+B)x+A$ cu $A+B=0$, $A=1$. Deci $A=1$, $B=-1$.

Aşadar $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ şi integrala este:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\ln|x|-\ln|x+1|+C=$$

$=\ln(-x)-\ln(x+1)+C$.□

3) Descompunem funcţia raţională în funcţii raţionale simple şi obţinem:

$$\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-3}.$$

Deci $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} = 2\ln|x-2| - \ln|x-3| + C =$
$= 2\ln(2-x) - \ln(3-x) + C.\square$

4) Acum $f(x) = \frac{2x+7}{(x-1)(x+2)} = \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$.

De aici $\int f(x)\mathrm{d}x = 3\ln|x-1| - \ln|x+2| + C =$

$= 3\ln(x-1) - \ln(x+2) + C = \ln\frac{(x-1)^3}{x+2} + C.\square$

5) Deoarece gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului, se efctuează mai întâi împărţirea, când avem:
$(x+1)^3 = (x^2-x)(x+4) + 7x + 1.$
Deci $\mathcal{I} = \int \left(x + 4 + \frac{7x+1}{x^2-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{x} + 4x + \int \frac{7x+1}{x^2-x}\mathrm{d}x.$
Acum se descompune $\frac{7x+1}{x^2-x}$ în funcţii raţionale simple când obţinem:
$\frac{7x+1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{8}{x-1}$. De aici $\mathcal{I} = \frac{x^2}{2} + 4x - \ln x + 8\ln(x-1) + C.\square$

Probleme propuse

Să se calculeze integralele următoare:

1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)}$, $x > 1$; 2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(2x-3)}$, $x > \frac{3}{2}$;

3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x}$, $x > 0$; 4) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(2x+1)}$, $x > -\frac{1}{2}$;

5) $\int \frac{(2x-1)\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)}$, $x > 2$; 6) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2-6x+5}$, $x > 5$;

7) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{2x^2-3x-2}$, $x > 2$; 8) $\int \frac{(x-4)\mathrm{d}x}{(x-2)(x-3)}$, $x > 3$;

9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x}$, $x > 1$; 10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)}$, $x > 0$;

11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+5x+6)}$, $x > -1$;

12) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+3)(x+5)}$, $x > -1$; 13) $\int \frac{(x^3+2)\mathrm{d}x}{4x^3-x}$, $x > \frac{1}{2}$;

14) $\int \frac{(3x^2+2x-3)\mathrm{d}x}{x^3-x}$, $x > 1$; 15) $\int \frac{(x^5+x^4-8)\mathrm{d}x}{x^3-4x}$, $x > 2$;

16) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$, $x>0$.

Probleme rezolvate

Să se calculeze integralele următoarelor funcţii raţionale pentru care **numitorul are rădăcini reale multiple**:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}$, $x>0$; 2) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$, $x>1$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}$, $x>-2$;

R. 1) Se descompune funcţia raţională în funcţii raţionale simple şi avem: $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$.

De aici rezultă $x^2-3x+2=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$, (1) sau $x^2-3x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$.

Identificând coeficienţii termenilor lui x la aceeaşi putere, se obţine sistemul:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 1=A+B \\ x & -3=2A+B+C \\ x^0 & 2=A \end{array}, \quad \text{cu soluţia } A=2,\ B=-1,\ C=-6.\square$$

Observaţie. Coeficienţii A, B, C se pot determina din (1) punând aici $x=0$ când $A=2$. Tot aici, pentru $x=-1$, se găseşte $C=-6$. Derivând egalitatea (1) rezultă

$$2x-3=2A(x+1)+B(x+1)+Bx+C,$$

în care facem $x=-1$ şi se găseşte $B=-1$.

În cele din urmă $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{6}{(x+1)^2}$, iar de aici

$$\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln x-\ln(x+1)+\frac{6}{x+1}+C=\ln\frac{x^2}{x+1}+\frac{6}{x+1}+C.\ \square$$

2) Se efectuează împărţirea lui x^3+1 la x^3-x^2 şi se obţine $x^3+1=(x^3-x^2)+x^2+1$.

Integrala de calculat este

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\right)\mathrm{d}x=x+\int\frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x^2(x-1)}.$$

Pentru calculul ultimei integrale se descompune funcţia raţională în funcţii raţionale simple de forma $\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}$, când se găseşte $A=B=-1$, $C=2$.

Deci integrala este:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = x - \ln x + \frac{1}{x} + 2\ln(x-1) + C = x + \ln\frac{(x-1)^2}{x} + \frac{1}{x} + C. \square$$

3) Se pune funcţia de integrat sub forma

$$f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+4} + \frac{D}{(x+4)^2}.$$

Aducând la acelaşi numitor şi apoi eliminând numitorul rezultă

$$x^2 = A(x+2)(x+4)^2 + B(x+4)^2 + C(x+2)^2(x+4) + D(x+2)^2, \quad (1)$$

În (1) se face $x = -4$ şi apoi $x = -2$ şi se obţine $D = 4$ şi respectiv $B = 1$. Derivând (1) rezultă

$2x = A(x+4)^2 + 2A(x+2)(x+4) + 2B(x+4) + 2C(x+2)(x+4) +$
$+C(x+2)^2 + 2D(x+2).$

Aici se face $x = -4$ şi $x = -2$ când se găseşte $C = -2$ şi respectiv $A = -2$. Integrala de calculat este:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+4} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+4)^2} =$$

$$= -2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} - 2\ln(x+4) - \frac{4}{x+4} + C =$$

$$= -2\ln[(x+2)(x+4)] - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + C. \square$$

Probleme propuse

Să se calculeze integralele:

1) $\int \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x$, $x > -1$; 2) $\int \frac{(x+2)\mathrm{d}x}{x^3 - 2x^2}$, $x < 0$;

3) $\int \frac{(5x-1)\mathrm{d}x}{x^3 - 3x - 2}$, $x < -1$; 4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - 2x^2 + x}$, $x > 1$;

5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 2x^2 + x}$, $x < -1$; 6) $\int \frac{(x^2 - 3x + 2)\mathrm{d}x}{x^3 + 2x^2 + x}$, $x > 0$;

7) $\int \frac{(7x^3 - 9)\mathrm{d}x}{x^4 - 5x^3 + 6x^2}$, $x < 0$.

Probleme rezolvate

Să se calculeze integralele următoarelor funcţii raţionale pentru care **numitorul are rădăcini complexe simple:**

1) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 4x + 5}$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$, $x > -1$;

3) $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$; 4) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$;

R. 1) Se scrie integrala sub forma:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+4x+5)-4x-8}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{4x+8}{x^2+4x+5}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= x - 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x = x - 2\ln(x^2+4x+5) + C.\square$$

2) Avem $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$. Aplicând metoda coeficienţilor nedeterminaţi rezultă $A = \dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{1}{3}$, $C = \dfrac{2}{3}$.

Deci $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} =$

$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.\square$$

3) Se descompune funcţia raţională în funcţii raţionale simple şi avem:

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Prin identificare găsim $A = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = 0$, $C = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $D = 0$.

Deci (pentru calcularea integralelor se prelucrează convenabil)

$$\frac{x^2}{x^4+1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1} =$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} +$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Acum $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+$

$$+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)] + C.\square$$

4) Se poate scrie f ca sumă de funcţii raţionale simple.

Vom proceda altfel. Pentru $x \neq 0$ avem:

$$f(x) = \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}.$$ Substituim $t = x - \dfrac{1}{x}$ şi deci $\mathrm{d}t = \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Integrala asociată este $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C.$

Prin urmare pe $(-\infty, 0)$ sau $(0, \infty)$ avem:

$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C.$

Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ rezultă că admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Fie $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$. Cu ajutorul acestei funcţii vom construi o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru f pe $\mathbb{R}$. Considerăm

$$F(x) = \begin{cases} G(x) + k, & x < 0 \\ k', & x = 0 \\ G(x) + k'', & x > 0. \end{cases}$$

Funcţia F este continuă în $x = 0$ (fiind derivabilă în $x = 0$) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow 0} F(x) =$ $= \lim\limits_{x \searrow 0} F(x) = F(0) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k'' = k'$. Luăm $k = 0$ şi atunci $k'' = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, iar $k' = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Prin urmare

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = 0 \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}, & x > 0. \end{cases}$$ Deci $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.\square$

Probleme propuse

Să se calculeze integralele următoare:

1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$, $x > 0$; 2) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$, $x < 0$;

3) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1}$, $x < 1$; 4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+8}$, $x < -2$;

5) $\int \frac{(x^4+1)\mathrm{d}x}{x^3-x^2+x-1}$, $x < 1$; 6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$;

7) $\int \frac{(x^3-6)\mathrm{d}x}{x^4+6x^2+8}$, $x > 0$; 8) $\int \frac{(7x-15)\mathrm{d}x}{x^3-2x^2+5x}$, $x < 0$;

9) $\int \frac{25\mathrm{d}x}{2x^4+3x^3+3x-2}$, $x > 1$; 10)* $\int \ln(x^4+x^2+1)\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$;

11) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Probleme rezolvate

Să se calculeze integralele funcţiilor raţionale pentru care **numitorul are rădăcini complexe multiple**:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$, $x>0$; 2) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

R. 1) Se descompune f în sumă de funcţii raţionale simple şi avem:

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Aplicând metoda coeficienţilor nedeterminaţi găsim $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-1$, $E=0$. Deci $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}-\int\dfrac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}-$

$$-\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2(x^2+1)}+C.\square$$

2) Se pune $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ şi se notează $x+2=t$. Integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1=\int\frac{(t-1)\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}-\int\frac{(1+t^2)-t^2}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2(t^2+1)}-$$

$$-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}+\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}=-\frac{1}{2(t^2+1)}-\operatorname{arctg}t+\int t\left(-\frac{1}{2(t^2+1)}\right)'\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{1}{2(t^2+1)}-\operatorname{arctg}t-\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Revenind la integrala iniţială avem:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2)+C.\square$$

Probleme propuse

Să se calculeze integralele următoare:

1) $\displaystyle\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $\displaystyle\int\frac{(x+4)\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$;

3) $\displaystyle\int\frac{(x^3+8x+21)\mathrm{d}x}{(x^2-4x+9)^2}$, $x\in\mathbb{R}$;

4) $\displaystyle\int\frac{2x\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)^2}$, $x>-1$; 5) $\displaystyle\int\frac{(4x^2-8x)\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)^2}$, $x>1$.

Integrale reductibile la integrale de funcţii raţionale

Integrarea unor funcţii iraţionale (facultativ)

Dacă funcţia de sub semnul integrală este de forma

$$R(x, \sqrt[k_1]{x}, \cdots, \sqrt[k_n]{x})$$

unde $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \geq 2$, atunci punând $x = t^k$, unde k este cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor $k_1, k_2, \cdots, k_n$ se ajunge la o integrală de funcţie raţională.

Exemple rezolvate. Să se calculeze:

1) $\mathcal{I} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt[3]{x}}$, $x > 0$; 2) $\mathcal{I} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$, $x > 0$.

R. 1) Punem $\sqrt[3]{x} = t$, adică $x = t^3$ şi deci $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$, iar integrala asociată este $\mathcal{I}_1 = 3\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t^3 + t} = \frac{3}{2}\int \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2 + 1} = \frac{3}{2}\ln(t^2 + 1) + C$.

Aşadar $\mathcal{I} = \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2} + 1\right) + C$. □

2) Cum în integrală figurează $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, vom nota $\sqrt[6]{x} = t$, adică $x = t^6$ (6 fiind cel mai mic multiplu comun de ordinele acestor radicali 2, 3). De aici $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$ şi integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1 = 6\int \frac{t^5\mathrm{d}t}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3\mathrm{d}t}{t+1} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(t+1) + C.$$

Deci $\mathcal{I} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$. □

Dacă funcţia de sub semnul integrală este de forma $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, atunci se pune $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, iar de aici $x = \frac{-\mathrm{d}t^m + b}{ct^m - a}$ ajungând in final la o integrală asociată de funcţie raţională în t.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala: $\int \frac{\sqrt{x+1}\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$, $x \geq 1$.

R. Se forţează factor comun la numitor $\sqrt{x+1}$ şi se aduce integrala la forma: $\mathcal{I} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$. Notăm $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$ când obţinem

$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ şi de aici $\mathrm{d}x = \frac{4t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$.

Integrala asociată lui $\mathcal{I}$ este: $\mathcal{I}_1 = 4\int \frac{t\mathrm{d}t}{(t-1)^2(t+1)^3}$.

Descompunând funcţia raţională (de integrat) în funcţii raţionale simple găsim:

$$\frac{t}{(t-1)^2(t+1)^3} = \frac{-1}{16(t-1)} + \frac{1}{8(t-1)^2} + \frac{1}{16(t+1)} - \frac{1}{4(t+1)^3}.$$

Deci $\mathcal{I} = -\frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{4}\ln(t+1) + \frac{1}{2(t+1)^2} + \mathcal{C}$. □

În cazul funcţiei de integrat de forma generală

$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$,

prezentăm câteva situaţii particulare simple, oferind tehnica de integrat.

1) Dacă funcţia de integrat este de forma

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ ax^2+bx+c > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

atunci se caută să se pună în evidenţă la numărător derivata trinomului ax^2+bx+c scriind funcţia f astfel

$$f(x) = \frac{(2ax+b)+d}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{d}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\mathcal{I} = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}.$$

R. Se scrie integrala sub forma (dacă $t = x^2+x+1$, atunci $\mathrm{d}t = (2x+1)\mathrm{d}x$)

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{(2x+1)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right).$$

Prima integrală din paranteză are ca integrală asociată pentru $t = x^2+x+1$. $\mathcal{I}_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{i}{2}}\mathrm{d}t = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \mathcal{C}$.

$$\text{Deci}\quad \mathcal{I} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x^2+x+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}[2\sqrt{x^2+x+1} + \ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})] + \mathcal{C}.\ \square$$

2) Dacă funcţia de integrat este de forma

$f(x)=\dfrac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $ax^2+bx+c>0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, p funcţie polinomială de grad $n\geq 2$, atunci se utilizează egalitatea

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x = q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+A\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (*)$$

unde q este o funcţie polinomială de grad $n-1$, iar A este o constantă. Pentru a determina coeficienţii funcţiei q şi pe A se derivează egalitatea $(*)$ şi se aplică **metoda coeficienţilor nedeterminaţi**.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\mathcal{I}=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+1}},\ x\in\mathbb{R}.$$

R. Conform celor spuse mai sus pentru $p(x)=x^2$ se ia $q(x)=\alpha x+\beta$ şi egalitatea

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+1}}=(\alpha x+\beta)\sqrt{x^2-x+1}+A\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

pe care o derivăm şi obţinem

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}=\alpha\sqrt{x^2-x+1}+(\alpha x+\beta)\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{A}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

sau $\quad 2x^2=2\alpha(x^2-x+1)+(\alpha x+\beta)(2x-1)+2A$

sau în fine $2x^2=4\alpha x^2+(2\beta-3\alpha)x+2\alpha-\beta+2A$.

De aici, prin identificare, rezultă sistemul

$$\begin{cases}4\alpha=2\\ -3\alpha+2\beta=0\\ 2\alpha-\beta+2A=0\end{cases}$$

cu soluţia $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{3}{4}$, $A=-\dfrac{1}{8}$.

Găsim $\mathcal{I}=\dfrac{2x+3}{8}\sqrt{x^2-x+1}-\dfrac{1}{8}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1})+C$. □

3) Dacă funcţia de integrat este de forma

$$f(x)=\frac{1}{(px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}},\ ax^2+bx+c>0,\ n\in\mathbb{N}^*,\ px+q>0\ (<0),$$

atunci se pune $px+q=\dfrac{1}{t}$.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\mathcal{I}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}},\ x>-1.$$

R. Notăm $x+1=\dfrac{1}{t}$, iar de aici $\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$. Integrala asociată lui $\mathcal{I}$ este

$$\mathcal{I}_1 = -\int \frac{t\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\sqrt{\dfrac{1-t+t^2}{t^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-t+1}} =$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = -\ln\left(t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right)+C =$$

$$= -\ln(2t-1+2\sqrt{t^2-t+1})+C.$$

Deci $\mathcal{I} = -\ln\left(\dfrac{2}{x+1}-1+\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right)+C.$ □

Probleme propuse

Să se calculeze integralele:

1) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\mathrm{d}x,\ x>0;$ 2) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x,\ x>0;$

3) $\int\dfrac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x,\ x>0;$ 4) $\int\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\ x>0;$

5) $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)\mathrm{d}x,\ x>0;$ 6) $\int\dfrac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\mathrm{d}x,\ x>0;$

7) $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x,\ x>1;$ 8) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)},\ x>1;$

9) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}},\ x>0;$ 10) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}},\ x\geq -1;$

11) $\int\dfrac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}},\ x>1;$ 12) $\int\dfrac{(x+1)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-2}},\ x>2;$

13) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})},\ x>0;$ 14) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}},\ x>0;$

15) $\int\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}},\ x>0;$ 16) $\int\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x,\ x\in(0,1);$

17) $\int\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x,\ x>0;$ 18) $\int\dfrac{1}{x+1}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x,\ x>1;$

19) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}},\ x>0;$ 20) $\int\dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\mathrm{d}x,$

$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2});$

21) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$, $x>1$; 22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$, $x>1$;

23) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\mathrm{d}x$, $x>0$; 24) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $x\in\mathbb{R}$;

25) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$, $x>-1$; 26) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x}{x}$, $x>1$;

27) $\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x^2}}$, $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$; 28) $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$, $x\in\mathbb{R}$;

29) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x>0$; 30) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$, $x>0$;

Integrarea unor funcţii trigonometrice prin schimbare de variabilă

Dacă funcţia de sub semnul integrală este de forma

$$R(\sin x,\cos x),$$

atunci prin substituţia universală $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ se poate obţine o integrală asociată de funcţie raţională în t.

Într-adevăr,

$$\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

iar din $x=2\mathrm{arctg}t$ rezultă $\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Exemplu practic. Să se calculeze

$$\mathcal{I}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x},\ x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

R. Cu elementele prezentate mai sus integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1=\int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=-2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t-1}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}}\right|+C.\ \text{Deci}\ \mathcal{I}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+C.\ \square$$

Observaţie Această substituţie se aplică funcţiilor R care au în structura lor funcţiile sin, cos **la puterea întâi**. Prezenţa acestor funcţii la puteri mai mari conduce la funcţii raţionale mai complicate şi deci calcule mai greoaie.

În astfel de situaţii se recomandă scrierea funcţiei R sub una din formele:

a) $\widetilde{R}(\sin^2 x, \cos x)\mathbf{\sin x} = \widetilde{R}(1-\cos^2 x, \cos x)\mathbf{\sin x}$

când se recomandă substituţia $t = \cos x$.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\mathcal{I} = \int \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R}.$$

R. Scriem integrala sub forma

$$\mathcal{I} = \int \sin^2 x \cos^2 x (\mathbf{\sin x dx}) = \int (1 - cos^2 x) \cos^2 x (\mathbf{\sin x dx}).$$

Punind $t = \cos x$ avem $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$ şi integrala asociată lui $\mathcal{I}$ este

$$\mathcal{I}_1 = -\int (1-t^2)t^2 \mathrm{d}t = \int (t^4 - t^2)\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C.$$

Deci $\mathcal{I} = \dfrac{\cos^5 x}{5} - \dfrac{\cos^3 x}{3} + C$. □

b) $\widetilde{R}(\cos^2 x, \sin x)\mathbf{\cos x} = \widetilde{R}(1-\sin^2 x, \sin x)\mathbf{\cos x}$.

În acest caz se substituie $\sin x = t$ când $\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\mathcal{I} = \int \cos^3 x \sin^2 x \mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R}.$$

R. Se aduce integrala la forma

$$\mathcal{I} = \int \cos^2 x \sin^2 x (\mathbf{\cos x dx}) = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \mathbf{\cos x dx}.$$

Notăm $t = \sin x$ si deci $\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$ când integrala asociată este

$$\mathcal{I}_1 = \int (1-t^2)t^2 \mathrm{d}t = \int (t^2 - t^4)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C.$$

Deci $\mathcal{I} = \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5} + C$. □

c) $\widetilde{R}(\sin^2 x, \cos^2 x)$, când se recomandă:

1) trecerea de la pătrate la cosinusuri de argument dublu după formulele

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

sau

2) substituţia $\mathrm{tg}x = t$ când $x = \mathrm{arctg}t$ şi deci $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

iar $\sin^2 x = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\mathcal{I} = \int \sin^2 x \cos^4 x \mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R}.$$

R. Urmând prima variantă funcţia de integrat devine succesiv:

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8}\sin^2 2x(\cos 2x + 1) = \frac{1}{8}\sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{16}(1 - \cos 4x)$$

şi deci $\mathcal{I} = \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C.$

Utilizând substituţia $t = \mathrm{tg}x$ integrala asociată devine

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

care este mult mai dificil de calculat decât prin metoda precedentă.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\mathcal{I} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x \cos^2 x}, \; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

R. În acest caz substituţia $t = \mathrm{tg}x$ conduce la integrala asociată

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\mathrm{d}t = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C.$$

De aici, $\mathcal{I} = \mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x - \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x + C.$ □

d) $\widetilde{R}(\sin^{2n+1} x, \cos^{2n+1} x) = \widetilde{R}_1(\sin^{2n} x, \cos^{2n} x)\sin 2x$

şi se exprimă puterile pare ale lui $\sin x$ şi $\cos x$ în funcţie de $t = \cos 2x$.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\mathcal{I} = \int \sin^5 x \cos^5 x \mathrm{d}x, \; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Se scrie integrala sub forma

$$\mathcal{I} = \int \sin^4 x \cos^4 x(\sin x \cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin^2 x)^2(\cos^2 x)^2 \sin 2x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \sin 2x \mathrm{d}x.$$

Se notează $t = \cos 2x$ şi deci $\mathrm{d}t = -2\sin 2x \mathrm{d}x$.

Integrala asociată este: $\mathcal{I}_1 = -\frac{1}{64}\int (1-t)^2(1+t)^2 \mathrm{d}t =$

$$= -\frac{1}{64}\int (1 - 2t^2 + t^4)\mathrm{d}t = -\frac{1}{64}(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}) + C.$$

Deci $\mathcal{I} = -\frac{1}{64}[\cos 2x - \frac{2}{3}(\cos 2x)^3 + \frac{1}{5}(\cos 2x)^5] + C.$ □

Există integrale $\mathcal{I}_1$ al căror calcul se face uşor dacă li se asociază o altă integrală $\mathcal{I}_2$ şi apoi se calculează $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ şi $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2$, ultimele două integrale fiind mai simple decât $\mathcal{I}_1$ şi $\mathcal{I}_2$.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}, \; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

R. Se consideră şi integrala $\mathcal{I}_2 = \int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$

şi calculăm $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = x + \mathcal{C}, \quad (1)$

şi respectiv

$$\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1 = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x =$$

$= \ln(\sin x + \cos x) + \mathcal{C}, \quad (2).$

Sistemul format cu ecuaţiile din (1) şi (2) dă soluţia

$\mathcal{I}_1 = \frac{x}{2} - \ln\sqrt{\sin x + \cos x} + \mathcal{C}, \quad \mathcal{I}_2 = \frac{x}{2} + \ln\sqrt{\sin x + \cos x} + \mathcal{C}.$ □

Următorul exemplu vine să ilustreze tehnica precedentă pentru o funcţie raţională care conţine funcţiile sinus şi cosinus, exprimând numărătorul ca o „combinaţie liniară“ de numitor şi derivata acestuia.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala

$$\mathcal{I} = \int \frac{2\sin x + 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x}\mathrm{d}x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

R. Se determină constantele A şi B astfel încât

$2\sin x + 3\cos x = A(4\sin x + 5\cos x) + B(4\cos x - 5\sin x)$

sau

$2\sin x + 3\cos x = (4A - 5B)\sin x + (5A + 4B)\cos x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

De aici, prin identificare, se obtine sistemul

$$\begin{cases} 4A - 5B = 2 \\ 5A + 4B = 3 \end{cases}$$ cu soluţia $A = \frac{23}{41}, \ B = \frac{2}{41}.$

Acum integrala se scrie

$$\mathcal{I} = \frac{23}{41}\int \frac{4\sin x + 5\cos x}{4\sin x + 5\cos x}\mathrm{d}x + \frac{2}{41}\int \frac{(4\sin x + 5\cos x)'}{4\sin x + 5\cos x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{23}{41}x + \frac{2}{41}\ln(4\sin x + 5\cos x) + \mathcal{C}.$$ □

Observaţie. Calculaţi integrala precedentă prin acest procedeu !

Probleme rezolvate

Să se calculeze integralele:

1) $\int \sin^2 ax\mathrm{d}x, \ a \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R};$ 2) $\int \cos^2 ax\mathrm{d}x, \ a, x \in \mathbb{R};$

3) $\int (1 - 2\sin x)^2\mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R};$ 4) $\int (1 - \cos 3x)^2\mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R};$

5) $\int \sin^3 x\mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R};$ 6) $\int \sin x \cos^2 x\mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R};$

7) $\int \sin^2 x \cos x\mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R};$ 8) $\int \sin^2 x \cos^2 \mathrm{d}x, \ x \in \mathbb{R};$

9) $\int \sin^2 x \cos^3 x \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$; 10) $\int \sin^3 x \cos^3 x \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$;

11) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{5 - 3\cos x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 14)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{3 + \sin x + \cos x},\ x \in (0, 2\pi)$;

15) $\int \sin x \sin 2x \mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R}$; 16)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin^2 x},\ x \in (0, \pi)$;

17) $\int \frac{\sin x \cos x \mathrm{d}x}{3\sin x + 2\cos^2 x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

18) $\int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{1 + \cos x + \cos^2 x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

19) $\int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 20) $\int \mathrm{tg}^4 x \mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

21)* $\int \sqrt{\mathrm{tg}^2 x + 2}\mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 22) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

R. 1) Se trece de la pătrat de sinus la cosinus de argument dublu după formula $\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax)$ şi deci integrala se scrie:

$$\mathcal{I} = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin 2ax + C.\square$$

2) Integrala devine: $\mathcal{I} = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2ax)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin 2ax + C.\square$

3) Avem: $\mathcal{I} = \int (1 - 4\sin x + 4\sin^2 x)\mathrm{d}x = x + 4\cos x + 4\int \sin^2 x \mathrm{d}x =$

$= x + 4\cos x + 4\int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\mathrm{d}x = x + 4\cos x + 2\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C =$

$= 3x + 4\cos x - \sin 2x + C.\square$

4) Se scrie integrala sub forma:

$$\mathcal{I} = \int (1 - 2\cos 3x + \cos^2 3x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - 2\int \cos 3x \mathrm{d}x + \int \cos^2 3x \mathrm{d}x =$$

$$= x - \frac{2}{3}\sin 3x + \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\mathrm{d}x = x - \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{x}{2} + \frac{1}{12}\sin 6x + C =$$

$$= \frac{3x}{2} - \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + C.\square$$

5) Se scrie integrala sub forma $\mathcal{I} = \int \sin^2 x \sin x \mathrm{d}x = \int (1 - \cos^2 x)\sin x \mathrm{d}x.$

Se substituie $t = \cos x$ şi integrala asociată este

$$\mathcal{I}_1 = -\int (1-t^2)\mathrm{d}t = \int t^2\mathrm{d}t - \int \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - t + C.$$

Deci $\mathcal{I} = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$. □

6) Se notează $t = \cos x$ şi se obţine integrala asociată

$\mathcal{I}_1 = -\int t^2\mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} + C$. Deci $\mathcal{I} = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$.□

7) Se pune $t = \sin x$. Integrala asociată este $\mathcal{I}_1 = \int t^2\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C$.

Deci $\mathcal{I} = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$. □

8) Avem $\int \frac{1}{4}\sin^2 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\mathrm{d}x = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$. □

9) Se substituie $t = \sin x$ şi avem:

$$\mathcal{I}_1 = \int t^2(1-t^2)\mathrm{d}t = \int (t^2 - t^4)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C.$$

Aşadar $\mathcal{I} = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.□

10) Integrala se prelucrează astfel:

$$\mathcal{I} = \int (\sin x\cos x)^3\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \sin^3 2x\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x)\mathrm{d}x = \frac{3}{32}\int \sin 2x\mathrm{d}x - \frac{1}{32}\int \sin 6x\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{3}{64}\cos 2x + \frac{1}{192}\cos 6x + C.$$

Am folosit formula $\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$,

iar de aici $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$. □

Observaţie. De la a treia egalitate se continuă ca la 5).

Altfel. Se pune $t = \sin x$ sau $t = \cos x$.

11) Se pune $t = \sin x$ şi integrala asociată este $\mathcal{I}_1 = \int \frac{(1-t^2)\mathrm{d}t}{t^2} =$

$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \int \mathrm{d}t = -\frac{1}{t} - t + C$. Deci $\mathcal{I} = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$.□

12) Scriem integrala sub forma

$$\mathcal{I} = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{tg}\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int \mathrm{ctg}\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right) =$$

$= -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C.\square$

Altfel. Notăm $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$. Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă $\frac{x}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ şi aplicaţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0,1),\ f(x) = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ este bijectivă şi deci inversabilă cu inversa dată de $x = 2\mathrm{arctg}t$. De aici $\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Se exprimă $\sin x$ în funcţie de t când avem $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C. \text{ Deci } \mathcal{I} = \ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C.\square$$

13) Se substituie $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Cum $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{5 - \frac{3(1-t^2)}{1+t^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot 2\mathrm{arctg}(2t) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2t) + C. \text{ Deci } \mathcal{I} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C.\square$$

14)* Să remarcăm că funcţia $f(x) = \frac{1}{3 + \sin x + \cos x}$ este continuă pe $(0, 2\pi)$ şi deci admite primitive aici. Nu se poate folosi substituţia $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, deoarece pentru $x = \pi$ nu este definită $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Vom construi o primitivă a lui f pe $(0, \pi)$ şi apoi cu ajutorul acesteia vom găsi o primitivă pentru f pe $(0, 2\pi)$. Fie $G : I \to \mathbb{R}$, unde I interval, $I \subset (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, o primitivă pentru f. Pentru a obţine pe G punem $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C.$$

Deci $G(x) = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{7}}$.

Construim o primitivă $F:(0,2\pi)\to\mathbb{R}$ a lui f pe $(0,2\pi)$, de forma:

$$F(x)=\begin{cases} G(x), & x\in(0,\pi)\\ k', & x=\pi\\ G(x)+k, & x\in(\pi,2\pi).\end{cases}$$

Pentru determinarea legăturii între constantele k şi k' se impune condiţia de continuitate a lui F în $x=\pi$. Funcţia F este continuă în

$$x=\pi\Leftrightarrow\lim_{x\nearrow\pi}F(x)=\lim_{x\searrow\pi}F(x)=F(\pi)\Leftrightarrow\frac{\pi}{\sqrt{7}}=-\frac{\pi}{\sqrt{7}}+k=k'.$$

Deci $k=\dfrac{2\pi}{\sqrt{7}}$, $k'=\dfrac{\pi}{\sqrt{7}}$. În fine, $F(x)=\begin{cases} G(x), & x\in(0,\pi)\\ \dfrac{\pi}{\sqrt{7}}, & x=\pi\\ G(x)+\dfrac{2\pi}{\sqrt{7}}, & x\in(\pi,2\pi).\end{cases}$

Acum $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.\square$

15) Se transformă produsul de sinusuri în diferenţă de cosinusuri după formula $\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$ şi avem:

$$\mathcal{I}=\int\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\cos x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\cos 3x\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{6}\sin 3x+C.\ \square$$

Observaţie. Dacă avem de calculat integralele

$$\int\sin\alpha x\cdot\cos\beta x\mathrm{d}x,\ \int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x\mathrm{d}x,\ \alpha,\beta,x\in\mathbb{R},$$

atunci utilizăm formulele

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)],$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)].$$

16)* Trebuie observat că $f(x)=\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$ este continuă pe $(0,\pi)$ şi deci admite primitive aici. Nu putem utiliza transformarea $t=\mathrm{tg}x$ deoarece pentru $x=\dfrac{\pi}{2}\in(0,\pi)$, $\mathrm{tg}x$ nu este definită. Ca şi la exerciţiul 14) vom construi o primitivă a lui f pe $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi apoi cu ajutorul acesteia o primitivă pe $(0,\pi)$. Pentru $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ din $t=\mathrm{tg}x$, $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ şi din $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$ rezultă integrala asociată

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}t) + \mathcal{C}$. În fine, $\mathcal{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\mathrm{tg}x) + \mathcal{C}$.

Deci $G : I \to \mathbb{R}$, unde I interval, $I \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, o primitivă a lui f pe I este $G(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\mathrm{tg}x)$.

Atunci o primitivă $F : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ a lui f pe $(0,\pi)$ are forma

$$F(x) = \begin{cases} G(x), & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ k, & x = \frac{\pi}{2} \\ G(x) + k', & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Legătura între constantele k şi k' se determină din condiţia de continuitate a lui F în $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} F(x) = \lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} F(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + k' = k$. De aici $k' = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. Deci

$$F(x) = \begin{cases} G(x), & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi\sqrt{2}}{4}, & x = \frac{\pi}{2} \\ G(x) + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases} \square$$

Observaţie. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\mathrm{tg}x) + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}, & x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ (2k+1)\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

17) Se pune $t = \sin x$ şi integrala asociată este

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{t\mathrm{d}t}{3t + 2(1-t^2)} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{-2t^2+3t+2} = -\frac{1}{4}\int \frac{(-4t+3)-3}{-2t^2+3t+2}\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\int \frac{(-4t+3)\mathrm{d}t}{-2t^2+3t+2} + \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - \frac{3}{2}t - 1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\ln|-2t^2+3t+2| + \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\ln|-2t^2+3t+2| + \frac{3}{5}\ln\left|\frac{t-2}{2t+1}\right|\right] + C.$$

Deci $\mathcal{I} = -\frac{1}{4}\left[\ln|-2\sin^2 x + 3\sin x + 2| + \frac{3}{5}\ln\left|\frac{\sin x - 2}{2\sin x + 1}\right|\right] + C.\square$

18) Se pune $t = \cos x$. În final $\mathcal{I} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\cos x + 1}{\sqrt{3}} + C.\square$

19) Se notează $t = \operatorname{tg} x$ (sau se poate pune şi $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$).

Găsim $\mathcal{I} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sin x + \cos x) + C.$ $\square$

Altfel. Se determină A, B astfel ca $\sin x = A(\sin x + \cos x) + B(\cos x - -\sin x)$. Găsim $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Deci $\mathcal{I} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sin x + \cos x) + C.$ $\square$

Observaţie. Dacă se notează

$\mathcal{I}_1 = \int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$, $\mathcal{I}_2 = \int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$, atunci

$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = x + C$; $\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1 = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x + \cos x)'\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} =$

$= \ln(\sin x + \cos x) + C$. De aici

$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}[x - \ln(\sin x + \cos x)] + C$, $\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}[x + \ln(\sin x + \cos x)] + C.$

20) Se notează $t = \operatorname{tg} x$, când integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1 = \int t^2 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{(t^2+1)(t^2-1)+1}{t^2+1}\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C.\square$$

Deci $\mathcal{I} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$

21)* Se pune $t = \operatorname{tg} x$ şi se obţine

$$\mathcal{I} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}}\right) + \ln(\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}) + C.\ \square$$

22) Se face $t = \operatorname{tg} x$ şi se găseşte

$\frac{1}{4}\ln(\sin x + \cos x) - \frac{1}{4}\cos x(\sin x + \cos x) + C.$

Probleme propuse

Să se calculeze integralele:

1) $\int \sin^2 3x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$; 2) $\int (1+2\cos x)^2\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

3) $\int (1-\sin 2x)^2\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$; 4) $\int \cos^4 x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

5) $\int \sin 3x\cos x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$; 6) $\int \sin 3x\sin 5x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

7) $\int \cos x\cos 3x\cos 6x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$; 8) $\int \sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

9) $\int \sin^4 x\cos^4 x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$; 10) $\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

11) $\int \sin^5 x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$; 12) $\int \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

13) $\int \cos^7 x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$; 14) $\int \sin^4 x\cos^2 \mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$;

15) $\int \cos^2 x\sin^3 x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R}$; 16) $\int \frac{1+\sin^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

17) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sin^3 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

19) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos^3 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 20) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^4 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

21) $\int \mathrm{tg}^5 x\mathrm{d}x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{tg}^8 x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

23)* $\int \frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x},\ x\in(0,\pi)$; şi apoi pentru $x\in(0,2\pi)$

24) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 25) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

26) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 27) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\mathrm{tg}x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

28) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x+4\cos x},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

29) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x-2\cos x+3},\ x\in(-\pi,\pi)$;

30) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\cos x},\ x\in(-\pi,\pi)$; 31) $\int \frac{\mathrm{d}x}{8-4\sin x+7\cos x},\ x\in(-\pi,\pi)$;

32) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-\sin x)(3-\sin x)},\ x\in(-\pi,\pi)$;

33) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+3\cos x}$, $x \in (-\pi, \pi)$;

34) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$, $x \in (-\pi, \pi)$;

35) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; 36) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x}$, $x \in (0, \pi)$;

37)* $\int \sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x$, $x \in [0, 2\pi]$; 38) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

39) $\int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 40) $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}\mathrm{d}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

41) $\int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{e^x+\sin x+\cos x}$, $x > 0$; 42) $\int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{e^x+\sin x+\cos x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

43) $\int \frac{5\sin x+3\cos x}{6\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

44)* $\int \frac{\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}+\ln x^{x+1}}{\sin x+x\ln x}\mathrm{d}x$, $x \in (1, 2)$;

45) $\int \frac{e^x-\cos x}{e^x-\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$, $x \in (1, 2)$.

Integrarea unor funcţii care conţin exponenţiale (facultativ)

Dacă avem de determinat $\mathcal{I} = \int R(a^x)\mathrm{d}x$, unde $R(a^x)$ este o funcţie continuă, atunci se recomandă substituţia $\boxed{t = a^x}$

De aici, formal, deducem $x = \log_a t = \frac{\ln t}{\ln a}$ şi $\mathrm{d}x = \frac{1}{t\ln a}\mathrm{d}t$ şi prin urmare integrala asociată are forma

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{\ln a}\int \frac{R(t)\mathrm{d}t}{t}.$$

Dacă R este o funcţie raţională, atunci $\mathcal{I}_1$ este integrală nedefinită a unei funcţii raţionale.

Exemplu practic. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\mathcal{I} = \int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{e^x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

R. Notând $t = e^x$ deducem $x = \ln t$ şi $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Integrala asociată lui $\mathcal{I}$ este integrală nedefinită dintr-o funcţie raţională.

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{t^2 \cdot \frac{dt}{t}}{t+1} = \int \frac{tdt}{t+1} = \int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t+1} =$$
$$= t - \ln(t+1) + C.$$
Revenim la integrala $\mathcal{I}$ punând in $\mathcal{I}_1$ în locul lui t, e^x şi deci
$\mathcal{I} = e^x - \ln(e^x+1) + C$. □

Probleme rezolvate

Să se calculeze integralele:

1) $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $\int \frac{2^x dx}{1+2^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

3) $\int \frac{e^{2x}+2e^x}{e^x+1}dx$, $x \in \mathbb{R}$.

R. 1) Notăm $t = e^x$ şi de aici $dt = e^x dx$. Integrala asociată este
$\mathcal{I}_1 = \int \frac{dt}{t+1} + \ln|t+1| + C$. Aşadar $\mathcal{I} = \ln(1+e^x) + C$. □

2) Punem $t = 2^x$ şi deci $dt = 2^x \ln 2 dx$. Integrala asociată este
$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\ln 2}\text{arctg}t + C$. Acum $\mathcal{I} = \frac{1}{\ln 2}\text{arctg}2^x + C$. □

3) Notând $t = e^x$ avem $dt = e^x dx$ şi integrala asociată este
$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{t+2}{t+1}dt = \int \frac{(t+1)+1}{t+1}dt = \int \left(1 + \frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$= t + \ln|t+1| + C$. Revenind la $\mathcal{I}$ avem $\mathcal{I} = e^x + \ln(1+e^x) + C$. □

Probleme propuse

Să se calculeze integralele

1) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$, $x > 0$; 2) $\int \frac{3^x dx}{1+3^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

3) $\int \frac{e^{2x}-e^x}{1+e^x}dx$, $x \in \mathbb{R}$; 4) $\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

5) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^x}dx$, $x > 0$; 6) $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$, $x \in \mathbb{R}$;

7) $\int \frac{e^x}{1+e^{3x}}dx$, $x \in \mathbb{R}$; 8) $\int \frac{dx}{1+|1-e^x|}$, $x < 0$;

9) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$; 10) $\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+4}dx$, $x \in \mathbb{R}$;

11) $\int \frac{dx}{e^{3x}-e^x}$, $x > 1$; 12) $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$, $x > 0$;

13) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^{-2x}}\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; 14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}$, $x > 0$;

15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{3x}-e^{2x}+e^x-1}$, $x > 0$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x \in (0,1) \\ e^{-x} - e^{-1}, & x \geq 1. \end{cases}$

Arătaţi că f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

2. Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii:

a) $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2$;

b) $f : (2,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x^3-2x^2}$, $x > 2$;

c) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}$, $x \in (-1,1)$.

3. Arătaţi că funcţia $F : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x+1) -$

$-\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x$, $x > -1$ este o primitivă a funcţiei

$f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$.

4. Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2+bx-2)e^{-x}$ să fie o primitivă a funcţiei $f(x) = x^2e^{-x}$.

5. Să se determine primitiva funcţiei $f(x) = x$ al cărui grafic este tangent dreptei $y = x - 1$.

Testul 2

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2+\ln(1-x), & x < 0 \\ , & x = 0 \\ 1+e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru m determinat la a), aflaţi primitivele lui f pe $\mathbb{R}$.

2. Să se calculeze următoarele integrale nedefinite:

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; b) $\int \frac{e^{3x}}{2+e^x}\mathrm{d}x$;

c) $\int \frac{x^3}{(x-1)^4}\mathrm{d}x$, $x > 1$.

3. Fie funcţiile $g, G : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x-1}}$, $G(x) = 2\sqrt{x-1} - 2\ln(1+\sqrt{x-1}) + 1$. Să se arate că G este o primitivă a lui g pe $(1, \infty)$.

4. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea

$$\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x = (ax+b)\sqrt{x^2+4} + c\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Determinaţi primitivele funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ale căror grafic este tangent parabolei $y = x^2 + 1$.

Testul 3 (de tip grilă)

1. Se dă funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)$. Constantele reale a, b, c pentru care funcţia $F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{c + bx + a\ln(x+1)}{x}$ are ca derivată pe $\dfrac{f(x)}{x^2}$ şi $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 1$ sunt: a) $a = b = 1$, $c = 0$; b) $a = 1$, $b = c = 0$; c) $a = -1$, $b = c = 1$; d) $a = b = c = 1$ e) $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$.

2. Egalitatea $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{ax+b}{x^2+2x+2} + \int \frac{cx+d}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$ are loc dacă

a) $a = b = 1$, $c = 0$, $d = -1$; b) $a = 0$, $b = c = d = 1$; c) $a = c = 0$, $b = d = 1$; d) $a = b = -1$, $c = 1$, $d = 0$; e) $a = c = -1$, $b = d = 1$.

3. Primitiva F a funcţiei f (pe $\mathbb{R}$), $f(x) = x + 2$, care este tangentă curbei de ecuaţie $g(x) = x^2$ este: a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x - 2$;

b) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x - 1$; c) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 3x - 1$; d) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x + 1$;

e) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x$.

4. Primitiva funcţiei $f(x) = \cos^2 x$ al cărei grafic trece prin punctul $A\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ este: a) $F(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{\sin 2x}{2}$; b) $F(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{2}$;

c) $F(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$; d) $F(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{\sin 2x}{2}$; e) $F(x) = \dfrac{x}{8} - \dfrac{\sin 2x}{4}$.

Subiecte date la admitere în facultate

1. Să se calculeze $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x+x^2}}$, $x>0$.

(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, UNIV. BACĂU, 1997)

2. Să se calculeze primitivele funcţiei $f(x)=\frac{x}{(x^2+3)(x+1)}$, $x>0$.

a) $F(x)=-\frac{1}{4}\ln(x+1)+\frac{1}{8}\ln(x^2+3)+\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$;

b) $F(x)=-\frac{1}{8}\ln(x+1)+\operatorname{arctg}x+C$;

c) $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x+1)^2+\ln(x^2+3)+\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$;

d) $F(x)=2\ln(x+1)^2+\operatorname{arctg}x+C$; e) Nu are primitive.

(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, UNIV. BRAŞOV, 1997)

3. Să se studieze existenţa primitivelor funcţiei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, definite prin $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+x^4}, & x\in[0,1]\\ x+a, & x>1\end{cases}$, unde a este parametru real. În cazul în care ele există să se determine aceste primitive.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV. CLUJ-NAPOCA, 1997)

4. Să se arate că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\le 0\\ \frac{x^2}{1+x}, & x>0\end{cases}$ admite primitive şi să se determine acestea.

(ADMITERE, COLEGIU, UNIV. CLUJ-NAPOCA, 1997)

5. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4x+4}, & x\le 0\\ 2, & x>0\end{cases}$ are primitive şi să se determine o primitivă a sa.

(ADMITERE, FIZICĂ, UNIV. CLUJ-NAPOCA, 1997)

6. Să se calculeze: a) $\int(2x+e^x)\mathrm{d}x$, $x\in\mathbb{R}$; b) $\int\frac{x^2}{x^2+4}\mathrm{d}x$, $x\in\mathbb{R}$;

c) $\int x\ln x\mathrm{d}x$, $x>0$.

(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ, CLUJ-NAPOCA, 1997)

7. Să se determine primitivele funcţiei $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$. (ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV. IAŞI, 1997)

8. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x^2-4|}$. Aflaţi primitivele lui f.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV. SIBIU, 1997)

9. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \ln(1-x), & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ 1 + e^{-2x}, & x > 0 \end{cases}$$ să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

a) 1; b) -1; c) 2; d) 3; e) $\frac{1}{2}$.

(ADMITERE, INGINERI, UNIV. SIBIU, 1997)

10. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1) Să se arate că f este continuă; 2) Să se calculeze o primitivă a lui f pe $(0, \infty)$; 3) Să se calculeze o primitivă a lui f pe $[0, \infty)$.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV. BUCUREŞTI, 1998)

11. Primitivele funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$, sunt:

a) $\ln(1 + \cos^2 x) + C$; b) $\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + C$; c) $\operatorname{arctg}(\cos x) + C$;
d) $-\operatorname{arctg}(\cos x) + C$; e) $-\operatorname{arcctg}(\cos x) + C$.

(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, UNIV. CRAIOVA, 1998)

12. Primitivele funcţiei $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln x)}$ sunt:

a) $(1 + \ln x)^2 + C$; b) $\ln^2(1 + \ln x) + C$; c) $\ln(\ln x) + C$;
d) $\ln(1 + \ln x) + C$; e) $\frac{1}{2} \ln(1 + \ln x) + C$.

(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, UNIV. CRAIOVA, 1998)

13. Primitivele funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(x^2 + 1)$ sunt funcţiile $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} \cos(x^2 + 1) + C$; b) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \cos(x^2 + 1) + C$; c) $F(x) = \dfrac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + C$; d) $F(x) = -\dfrac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + C$;
e) $F(x) = \dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{\sin^2(x^2 + 1)}{2} + C$.

(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, UNIV. GALAŢI, 1998)

14. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^4 + x^2 + 1} \mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$.

(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, UNIV. IAŞI, 1998)

15. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x)\operatorname{arctg} x$ admite primitive şi determinaţi aceste primitive.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV. PITEŞTI, 1998)

16. Integrala $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$, este: a) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + C$;

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C$; c) nu se poate afla primitiva.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV. BACĂU, 1999)

17. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2+|x-1|+|x-3|$ şi fie F primitiva lui f astfel încât $F(2)=0$. Să se calculeze $F(4)$.
a) 6; b) 5; c) 7; d) 4.

(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, UNIV. BRAŞOV, 1999)

18. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $F(x)=(ax+b)\sqrt{x^2+1}$ este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

(ADMITERE, TEHNOLOGIE INFORMATICĂ, UNIV. CONSTANŢA, 1999)

19. Să se determine primitivele funcţiei $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\frac{1}{\sin x-2\cos x+3}$.

(ADMITERE, INFORMATICĂ, UNIV. IAŞI, 1999)

20. Primitivele funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^3+x}$ sunt funcţiile $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ date de: a) $F(x)=\ln\frac{x^2}{x^2+1}+C$;
b) $F(x)=\ln(x\sqrt{x^2+1})+C$; c) $F(x)=\ln x-\text{arctg}x+C$;
d) $F(x)=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$; e) $F(x)=x+\sqrt{x^2+1}+C$.

(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ, IAŞI, 1999)

21. Să se calculeze $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}\text{d}x$, $x\in(0,1)$.

(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, UNIV. ORADEA, 1999)

22. Fie $f(x)=\frac{1}{x(x^2+1)}$, $x>0$ şi F o primitivă a sa cu proprietatea $F(1)=-\ln\sqrt{2}$. Atunci $F(2)$ este egal cu:
a) $-\ln\frac{\sqrt{5}}{2}$; b) $\ln\frac{2}{\sqrt{5}}$; c) $-\ln\sqrt{5}$; d) $-\ln\frac{2}{\sqrt{5}}$.

(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, PITEŞTI, 1999)

23. Să se determine $3a+5b$ ştiind că funcţia $F(x)=e^{-x}(a\sin x+b\cos x)$ este o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei $f(x)=e^{-x}\sin x$.
a) -5; b) -4; c) -3; d) -2; e) -1.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV. CONSTANŢA, 2000)

24. Fie $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^3+x^2-x-1}$ şi F o primitivă a lui f pentru care $F(2)=-\frac{\ln 2}{4}$. Atunci $F(0)$ este:

a) $\frac{1}{2}$; b) 2; c) -2; d) $-\frac{1}{3}$; e) -3.

(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, UNIV. PLOIEŞTI, 2000)

25. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin: $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 0 \\ 3x^2 + 4x + m, & x > 0, \ m \in \mathbb{R} \end{cases}$

1) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile ecuaţiei $3x^2 + 4x + m = 0$ să fie reale şi negative.

2) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$, astfel încât f să fie continuă.

3) Aflaţi primitivele funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, BAIA MARE, 2002)

26. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită: $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{xe^{nx} + x^2 + a}{e^{nx} + 1}$ $a \in \mathbb{R}$.

Să se precizeze valoarea lui a astfel încât f să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

a) $a \in \mathbb{R}$; b) $a = 1$; c) $a = 0$; d) $a = -1$.

(ADMITERE, INGINERI, BRAŞOV, 2002)

27. Fie $F : (0, \infty) \to R, F(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & x \in (0, e] \\ ax + b, & x > e, \ a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$ astfel încât F să fie primitivă pe $(0, \infty)$ a unei funcţii $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Dacă $T = ab$, atunci:

a) $T = \frac{3}{e}$; b) $T = 1 - e$; c) $T = 4e$; d) $T = -\frac{6}{e}$; e) $T = \frac{e}{2}$.

(ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 2002)

Teste pentru pregătirea examenului de bacalaureat

Testul 1

I. 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ următoarele ecuaţii:

a) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2^x$;

b) $\dfrac{\log_{4\sqrt{x}}(2)}{\log_{2x}(2)} + \log_{2x}(2) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2x) = 0$;

c) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$; d) $\arcsin x + \arccos(x-1) = \pi$;

e) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$; f) $A^3_{x+1} - C^{x-4}_x = 23C^4_x$;

g) $x^2 + x + a = 0$, $x^3 - ax - 3 = 0$ dacă au o rădăcină comună reală, unde $a \in \mathbb{R}$ se cere a fi determinat.

2. Se consideră curba C de ecuaţie $y = x^3$. Să se determine un punct $A(x_0, y_0)$ pe curba C astfel încât tangenta în A la C să treacă prin punctul de coordonate $(-1, 0)$.

II. 1. a) Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
Să se studieze monotonia lui f pe domeniul de definiţie.

b) Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ este monoton şi mărginit.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 5y + 2z = 3 \end{cases}$, iar A matricea sistemului. a) Să se calculeze $\det(A)$; b) Să se arate că sistemul este compatibil nedeterminat; c) Să se determine soluţiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului, pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2$.

III. 1. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(2,2)$.

a) Să se determine coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC. Se consideră M simetricul lui A faţă de B, N simetricul lui B faţă de C şi P simetricul lui C faţă de A.

b) Să se calculeze coordonatele punctelor M, N şi P.

c) Să se arate că G este centrul de greutate al triunghiului MNP.

2. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \alpha\vec{j} - 7\vec{k}$ sunt perpendiculari.

3. Să se arate că dreapta de ecuaţie $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = -5 + 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, este paralelă planului $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

IV. 1. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c$, a, b, c parametri.

a) Să se determine în funcţie de coeficienţi suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

b) Pentru $a = 3$, să se arate că pentru orice $b, c \in \mathbb{R}$ polinomul f nu poate avea toate rădăcinile reale.

c) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ştiind că restul împărţirii lui f la $X - 1$ este egal cu 3 şi f are rădăcina $-1 + \sqrt{2}$.

Pentru a, b, c determinaţi, rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Să se arate că:

a) f este bijectivă; b) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{2}$; c) Funcţia $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + x\ln x$ este o primitivă a lui f pe $(0, \infty)$

(Pentru profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie)

Testul 2

I. 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ următoarele inecuaţii:
a) $5^x - 3^{x+1} \geq 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$; b) $\log_{x+1}(3x-1) > 1$;
c) $\sin x > \sin 2x$; d) $(x+3)C_{x+2}^x - 6C_{x+1}^x \leq 9(x+1)$.

2. Fie funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1 - x\ln x}{x}$.
a) Să se calculeze limitele lui f la capetele intervalului de definiţie.
b) Calculaţi f' şi f''. c) Să se traseze graficul funcţiei f;
d) Să se arate că există şi este unic $x_0 \in (0,\infty)$ pentru care $\ln x_0 = \dfrac{1}{x_0}$.
e) Să se arate că există şi este unic $x_1 \in (0,\infty)$ pentru care tangenta la graficul lui f în punctul $(x_1, f(x_1))$ este paralelă cu a doua bisectoare.

II. 1. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + aX^2 + bX + 6$.
a) Să se determine coeficienţii a, b ştiind că f are rădăcina $x_1 = 1 - i$.
b) Să se determine rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale polinomului în cazul $a = 5$, $b = 8$. c) Pentru rădăcinile x_1, x_2, x_3 de mai sus să se calculeze $(x_1-2)(x_2-2) + (x_2-2)(x_3-2) + (x_3-2)(x_1-2)$.

2. Se consideră şirurile (a_n) şi (b_n) definite astfel:
$a_0 = -\dfrac{3}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n - 1$, $n \geq 0$, $b_n = 2a_n + 6$, $n \geq 0$.
a) Să se arate că şirul (b_n) este o progresie geometrică, determinându-se primul termen şi raţia. Să se determine termenul general al fiecărui şir.
b) Se consideră şirurile cu termenul general $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ şi $T_k = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i$.
Să se determine termenul general al fiecărui şir, şi dacă există, să se calculeze limitele şirurilor.

III. 1. Arătaţi că dreptele:
a) $3x + 2y - 7 = 0$ şi $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ sunt paralele;
b) $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 8 - t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5 - 3k \\ y = 10 + 3k \end{cases}$, $t, k \in \mathbb{R}$, coincid;
c) $(m-1)x + my - 5 = 0$, $mx + (2m-1)y + 7 = 0$ sunt perpendiculare dacă $m = \dfrac{2}{3}$.

2. O dreaptă trece prin punctele $A(2,-3,1)$, $B(-1,0,-5)$. Să se determine punctele de intersecţie ale dreptei cu planele de coordonate.

3. Fie $A(2,-3,-5)$, $B(-1,3,2)$ două vârfuri ale paralelogramului $ABCD$, iar $E(4,-1,7)$ punctul de intersecţie al diagonalelor sale. Să se determine celelalte două vârfuri.

IV. 1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{(x^2+3)(x+1)}$.

a) Să se determine numerele reale a,b,c pentru care

$$\frac{x}{(x^2+3)(x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+3}.$$

b) Să se calculeze $\int f(x)\mathrm{d}x,\ x>0$.

2. Se consideră mulţimea $G=(2,\infty)$ pe care se defineşte legea $x*y=xy-2(x+y)+6,\ x,y\in G$.

a) Arătaţi că „$*$“ este lege de compoziţie pe G şi că $(G,*)$ este grup abelian. b) Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to(2,\infty),\ f(x)=e^x+2$, este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(G,*)$.

(Pentru profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie)

Testul 3

I. 1. Fie polinomul $f\in\mathbb{R}[X],\ f=X^3-9X^2+26X-24$.

a) Să se calculeze $f(2)$; b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X-2$; c) Să se rezolve ecuaţia $f(x)=0$; d) Să se descompună în fracţii simple $\dfrac{1}{f}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1},\ a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a,b ştiind că funcţia admite în $x=1$ un extrem egal cu $\dfrac{1}{2}$; b) Pentru $a=1$ şi $b=0$ să se stabilească intervalele de monotonie pentru funcţia dată; c) Pentru $a=1,\ b=0$ să se studieze variaţia funcţiei şi să se reprezinte grafic funcţia, folosind şi derivata a doua.

II. 1. Să se rezolve ecuaţiile: a) $1-\sqrt{13+3x^2}=2x$;

b) $9^x-3^x-6=0$; c) $\log_5(x+5)+\log_5(x+10)=2$;

d) $C_{x-1}^2-C_{x-1}^1=27$; e) $2\cos^2 t-\cos t-1=0$.

2. Determinaţi punctele de inflexiune ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-12x^2$.

III. 1. Fie punctele $A(0,4)$, $B(3,5)$ şi dreapta $3x+2y-10=0$. Să se determine: a) ecuaţia cercului care trece prin punctele date şi are centrul pe dreapta dată; b) ecuaţia tangentei la cerc în punctul $B(3,5)$; c) aria triunghiului având ca vârfuri originea, punctul A şi centrul cercului.

2. Arătaţi metric, vectorial şi utilizând panta dreptei că punctele $A(0,-2)$, $B(1,1)$, $C(2,4)$ sunt coliniare.

IV. 1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. a) Să se calculeze A^2 şi A^3;

b) Să se verifice că $A^2 = 4A - 5I_2$;

c) Să se arate că $A^{n+1} = 4A^n - 5A^{n-1}$, $\forall n \geq 2$;

d) Să se demonstreze că $A^n \neq I_2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Să se arate că $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$, $\forall x \geq 0$;

b) Să se determine primitivele funcţiei f.

3. Pe mulţimea $G = (10, \infty)$ definim operaţia

$x * y = xy - 10(x + y) + 110$, $\forall x, y \in G$.

a) Arătaţi că " $*$ " este o lege de compoziţie pe G;

b) Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

(Pentru profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie)

Testul 4

I. 1. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât inecuaţia $\dfrac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \leq a$, să fie adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - m}{x+1} e^x$, m parametru real.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât f să aibă trei puncte de extrem;

b) Pentru $m = 2$ să se stabilească monotonia şi punctele de extrem ale funcţiei obţinute.

II. 1. Fie sistemul (S) : $\begin{cases} 2x - y + 5z + 7t = 0 \\ 4x - 2y + 7z + 5t = 0 \\ 2x - y + z - 5t = 0. \end{cases}$

a) Sistemul admite soluţiile $x = -8$, $y = 8$, $z = -3$, $t = 1$, respectiv $x = 4$, $y = 8$, $z = 0$, $t = 0$?

b) Să se rezolve sistemul.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 5) - \ln(x^2 + 1)$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f;

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

c) Să se arate că $0 < f(x) \leq \ln 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

III. 1. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul $\mathcal{C}$

de ecuaţie $x^2 + (y-4)^2 = 16$.

a) Precizaţi centrul şi raza cercului $\mathcal{C}$; reprezentaţi cercul.

b) Să se verifice prin calcul, că punctul $A(0,-2)$ nu aparţine cercului. Să se determine coordonatele punctelor B situate pe cerc, astfel încât tangenta în B la cerc să treacă prin A. Scrieţi ecuaţiile acestor tangente la cerc. Determinaţi pantele acestor tangente.

2. Se consideră vârfurile $A(1,-2,2)$, $B(1,4,0)$, $C(-4,1,1)$, $D(-5,-5,3)$ ale unui patrulater. Arătaţi că diagonalele $[AC]$ şi $[BD]$ sunt perpendiculare.

IV. 1. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x = (ax+b)\sqrt{x^2+4} + c\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}},\ x \in \mathbb{R}.$$

2. a) Să se rezolve ecuaţia $x^3 + (3i-2)x^2 - (1+4i)x + 2 + i = 0$, dacă admite o rădăcină reală;

b) Să se rezolve ecuaţia $x^3 - (8-\sqrt{3})x^2 + 2(\sqrt{3}-3)x + 108 - 48\sqrt{3} = 0$, dacă admite o rădăcină întreagă.

(Pentru profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie)

Testul 5

I. 1. Să se rezolve ecuaţia $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$.

2. Se consideră dezvoltarea $(\sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt[4]{y}})^n$, $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine n pentru care coeficienţii termenilor 1, 2, respectiv 3 ai dezvoltării, formează o progresie aritmetică.

b) Pentru $n = 8$, verificaţi dacă există termeni ai dezvoltării astfel încât puterea lui y să fie număr natural.

3. Se consideră submulţimea numerelor reale $G = (2,\infty) - \{3\}$ pe care se defineşte operaţia $x * y = (x-2)^{\frac{1}{3}\ln(y-2)} + 2$.

a) Să se arate că operaţia " $*$ " este lege de compoziţie pe G.

b) Să se demonstreze că G împreună cu legea de compoziţie "$*$" formează o structură de grup comutativ.

II. 1. Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ (D domeniul maxim de definiţie) $f(x) = x - \sqrt{ax^2+bx+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

a) Să se determine a, b astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$;

b) Pentru $a = b = 1$ să se determine asimptotele la graficul funcţiei obţinute.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5^{1+x} + 5^{1-x} + 25^x + 25^{-x}$.

a) Să se stabilească monotonia şi punctele de extrem ale funcţiei.
b) Să se discute după valorile parametrului real m numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $f(x) = m$.

III. 1. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(-2,0)$ şi $C(3,0)$.
a) Să se reprezinte punctele şi să se calculeze distanţele BC şi AC.
b) Să se scrie ecuaţiile mediatoarelor segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$. Să se determine centrul şi raza cercului circumscris triunghiului ABC.

(Bacalaureat, sesiunea august, 1999, problema III, clase profil economic, fizică-chimie şi chimie-biologie)

2. Se dau trei vârfuri $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-4)$, $C(-1,1,2)$ ale paralelogramului $ABCD$. Să se determine al patrulea vârf D.

IV. 1. Se consideră polinoamele $f = X^4+X^3+X^2+X+1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ şi $g = X^2 + X + 1$ cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.
a) Să se arate că $y_1^3 = y_2^3 = 1$.
b) Să se arate că polinomul f divide polinomul $X^5 - 1$.
c) Să se deducă identitatea $x_k^5 = 1$, $\forall k \in \{1,2,3,4\}$.
d) Să se calculeze valoarea expresiei:
$$A = (x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_3 - y_1)(x_4 - y_1)(x_1 - y_2)(x_3 - y_2)(x_4 - y_2).$$

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$.
a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. b) Să se studieze monotonia funcţiei f.
c) Să se determine asimptota oblică la ramura către $+\infty$ a graficului funcţiei f.

(Bacalaureat, august 2000, varianta 2, subiectul II, profilurile economic, fizică-chimie şi chimie-biologie)
(Pentru profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie).

Testul 6

I. 1. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9 + m$, unde m este un parametru real.
a) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) Să se determine punctul de minim şi minimul funcţiei f.
c) Pentru $m = 0$ să se determine valorile reale ale lui x pentru care $(f \circ f)(x) = 0$.

2. Fie polinomul $f = X^3 + X + 1$. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X + 2$.

3. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ şi $b_n = 9^n$.

a) Să se arate că cele două şiruri sunt progresii geometrice şi să se determine raţia fiecăruia.

b) În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(\log_2 a_n, \log_3 b_n)$, $n \geq 1$. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctele A_1 şi A_2.

II. 1. Pe mulţimea numerelor reale definim legea

$x * y = -xy + 5x + 5y - 20$.

a) Să se arate că legea este asociativă. b) Să se arate că $x * 4 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. c) Să se demonstreze că mulţimea $(-\infty, 5)$ este parte stabilă în raport cu legea " $*$ ".

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$.

a) Să se demonstreze prin inducţie matematică $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(0) + f^{(2)}(0) + \ldots + f^{(n)}(0)}{2^n}$.

III. 1. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(4,0)$, $C(6,6)$.

a) Să se determine coordonatele punctului M, mijlocul segmentului $[AB]$. b) Să se scrie ecuaţia dreptei CM.

2. Arătaţi că dreptele

$$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

sunt perpendiculare.

IV. 1. Se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Definim $B = A + I_3$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) Să se calculeze A^2. c) (3p) Să se arate că $B^2 = 2B - I_3$.

d) Să se demonstreze că B este inversabilă şi să i se calculeze inversa.

e) Să se calculeze B^n, $\forall n \geq 1$.

(Bacalaureat, sesiunea august 2000, subiectul III, profilurile economic, fizică-chimie şi chimie-biologie)

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + n}{x - 1}$, ($m, n$ parametri reali).

a) Să se determine m şi n astfel încât funcţia f să admită un extrem egal cu 1 în punctul $x = 0$. b) Pentru $m = 1$ şi $n = -1$, să se studieze şi să se reprezinte grafic funcţia f, folosind şi derivata a doua. c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei de la b) în punctul de abscisă 3.

(Pentru profilurile economic, fizică-chimie şi chimie-biologie)

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

pag. 18. 1) $\frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3\ln x + C$; 2) $\frac{x^2}{2} - 3\ln(-x) - \frac{5}{x} + C$;

3) $\frac{x^2}{2} - 2x\sqrt{x} + \frac{5}{6}x\sqrt[5]{x} + C$; 4) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + C$; 5) $\frac{1}{3}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{9}}\right) + C$;

6) $\frac{1}{24}\ln\frac{3-4x}{3+4x} + C$; 7) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C$; 8) $-\frac{3}{4}\ln\frac{x-2}{x+2} - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$;

9) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + C$; 10) $\frac{x^2}{2} - 3e^x + C$;

11) $\ln x - \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{x} - \frac{3^x}{\ln 3} + C$; 12) $x - 3\ln(-x) - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$;

13) $\ln|x+\sqrt{x^2-3}| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} + C$; 14) $x - \cos x + C$; 15) $\operatorname{tg}x - \sin x + C$.

pag. 22.

1) $G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x, & x \geq -1 \\ -\frac{x^2}{2} - x - 1, & x < -1 \end{cases}$; 2) $G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x, & x \geq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x - 1, & x < 1 \end{cases}$;

3) $G(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x, & x < -1 \\ -\frac{x^3}{3} + x + \frac{4}{3}, & x \in [-1, 1] \\ \frac{x^3}{3} - x + \frac{8}{3}, & x > 1 \end{cases}$; 4) $G(x) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\cos x - 4, & x \in [-2\pi, -\pi] \\ \cos x - 2, & x \in (-\pi, 0) \\ -\cos x, & x \in [0, \pi] \\ \cos x + 2, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases}$;

5) $g(x) = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} -2x, & x \leq -1 \\ 2, & x \in (-1, 1) \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$, $G(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq -1 \\ 2x + 1, & x \in (-1, 1) \\ x^2 + 2, & x \geq 1. \end{cases}$

pag 28. 1) a) $\frac{x^4}{4} - x^2 + 5x + C$; b) $\frac{x^2}{2} - \frac{5}{x} + C$; c) $\frac{3}{2}x^2 - 2\ln x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

d) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$; e) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{9}{4}x\sqrt[3]{x} + C$; f) $x - 4\sqrt{x} + \ln x + C$;

g) $\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C$; h) $\operatorname{ctg}x + 3\operatorname{tg}x + C$; i) $\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C$;

j) $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$; $\operatorname{tg} x - x + C$; k) $-2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$;
l) $3e^x + 5\operatorname{tg} x + C$; m) $\dfrac{3^x}{\ln 3} + \operatorname{ctg} x + C$ n) $e^x - x + C$.

2) Funcţiile nu au proprietatea lui Darboux. a) Se ia $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{10}$ şi $\lambda = 27 \in (g(a), g(b))$. Atunci se arată că pentru orice $x \in (\sqrt{8}, \sqrt{10})$ avem $f(x) \neq 27$; c) Se ia $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $\lambda = 2^2 \in (2^{\sqrt{2}}; 2^{\sqrt{5}})$; d) $a = \sqrt{2}$, $b = 3$, $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \in (0, \sqrt{2})$; e)* **Varianta cu vecinătăţi.** Există $x_0 \in (a, b)$ pentru care $f(x_0) \neq g(x_0)$. Din continuitatea funcţiilor f, g în x_0 şi proprietatea de separare a lui $\mathbb{R}$ se pot alege $V_g \in \mathcal{V}_{g(x_0)}$, $V_f \in \mathcal{V}_{f(x_0)}$ cu $V_g \cap V_f = \emptyset$, pentru care există U_g, $U_f \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $\forall\, x \in I \cap U_g$, $g(x) \in V_g$ şi $\forall\, x \in I \cap U_f$, $f(x) \in V_f$. Este clar că $U_f \cap U_g \in \mathcal{V}_{x_0}$. Acum pentru $I \cap U_f \cap U_g = I_{f,g}$, $h(I_{f,g})$ este reuniunea de mulţimi disjuncte (incluse în V_g şi V_f), adică nu este interval.

Altfel. Funcţia $i(x) = h(x) - f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (a,b) \cap \mathbb{Q} \\ g(x) - f(x), & \text{în rest.} \end{cases}$

Cum $f(x_0) \neq g(x_0)$, atunci $(g-f)(x_0) \neq 0$. Din continuitatea lui $g - f$ se poate găsi un interval $I_\epsilon = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset (a, b)$ pe care $g - f \neq 0$.
Atunci $i(I_\epsilon) = \{0\} \cup \{g(x) - f(x) |\ x \in I_\epsilon\}$ care nu este interval şi i nu admite primitive. Acum este uşor de văzut că h nu admite primitive.

Varianta $\epsilon - \delta$. Există $x_0 \in (a, b)$ astfel încât $f(x_0) < g(x_0)$. Din f continuă în x_0 rezultă că $\forall\, \epsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_{f,\epsilon} > 0$ astfel încât $\forall\, x \in (x_0 - \delta_{f,\epsilon}, x_0 + \delta_{f,\epsilon}) \cap (a, b)$ să avem $f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. De asemenea din g continuă în x_0 rezultă că $\forall\, \epsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_{g,\epsilon} > 0$ astfel încât $\forall\, x \in (x_0 - \delta_{g,\epsilon}, x_0 + \delta_{g,\epsilon}) \cap (a, b)$ să rezulte $g(x) \in (g(x_0) - \epsilon, g(x_0) + \epsilon)$. Se notează $\delta_\epsilon = \min(\delta_{f,\epsilon}, \delta_{g,\epsilon})$. Se alege $0 < \epsilon < \dfrac{g(x_0) - f(x_0)}{2}$. Pentru $I = (x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon) \cap (a, b)$ se arată că $h(I)$ nu este interval. f) Se aplică e)*.

3) Funcţiile sunt continue pe domeniile de definiţie.

1) $F(x) = \begin{cases} e^x + x, & x \geq 0 \\ \dfrac{x^3}{3} + 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$; 2) $F(x) = \begin{cases} -\cos x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ x - \sin x - 1, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \end{cases}$;

3) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2x, & x \geq -2 \\ -\dfrac{x^2}{2} - 2x - 4, & x < -2 \end{cases}$; 4) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2x, & x \geq 2 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 4, & x < 2 \end{cases}$;

5) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - 4x, & x \leq -2 \\ -\dfrac{x^3}{3} + 4x + \dfrac{32}{3}, & x \in (-2, 2) \\ \dfrac{x^3}{3} - 4x + \dfrac{64}{3}, & x \geq 2 \end{cases}$;

6) $F(x)=\begin{cases}\sin x-4, & x\in\left[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right]\\ -\sin x-2, & x\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ -\sin x+2, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\\ \sin x+4, & x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\end{cases}$;

7) $F(x)=\begin{cases}\ln x+\frac{1}{x}, & x\geq 1\\ 2-\cos(x-1), & x<1\end{cases}$;

8) $F(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}, & x\geq 1\\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{25}{12}, & x\in[0,1)\end{cases}$;

9) $F(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}x, & x\leq 0\\ x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}, & x>0\end{cases}$;

10) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}, & x\leq -2\\ -\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{3}, & x>-2\end{cases}$;

11) $F(x)=\begin{cases}\ln(x+\sqrt{x^2+1}), & x\in[-1,0)\\ \operatorname{tg}x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$;

12) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{3^x}{\ln 3}, & x\geq 0\\ \arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2\ln 3}, & x\in[-1,0)\end{cases}$;

13) $F(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\\ x-\ln(\cos x)-1, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\end{cases}$;

14) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}, & x\in[0,1)\\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}, & x\in(-1,0)\end{cases}$;

15) $F(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\in[1,2)\\ x-1, & x\in(0,1)\end{cases}$;

16) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & x\in(-2,-1]\\ \frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}, & x\in(-1,0)\\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}, & x\in[0,1]\\ \frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}, & x\in(1,2)\end{cases}$;

17) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+x, & x\in(-3,-1)\\ \frac{x^3}{3}-x-\frac{7}{6}, & x\in[-1,2]\\ \frac{x^2}{2}+x-\frac{9}{2}, & x\in(2,3)\,.\end{cases}$

4) Din egalitatea $G'(x)=g(x)$ se deduc valorile lui a, b; a) $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{2}{9}$; b) $a=1$, $b=0$.

5) Se utilizează egalitatea $G'(x) = g(x)$; a) $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$, $c = -\frac{3}{5}$; b) $a = 1$, $b = 0$, $c = -16$.

6) Din egalitatea $G'(x) = g(x)$, $x \in [1, e]$ rezultă

$(a+4)\ln^3 x + (b+3a)\ln^2 x + (c+2b)\ln x + d + c = 0$, $\forall\, x \in [1, e]$

şi de aici sistemul $a + 4 = 0$, $b + 3a = 0$, $c + 2b = 0$, $d + c = 0$ cu soluţia: $a = -4$, $b = 12$, $c = -24$, $d = 24$.

7) Trebuie ca G să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$. Se analizează cazurile:

1) $a < b$, imposibil; 2) $a = b$, când $a = \pm 1$; 3) $a > b$, imposibil.

8) 1) $G(x) = x^4 - x^2 + 3x$; 2) $G(x) = \frac{2}{3}(x-3)\sqrt{x} + \frac{4}{3}$;

3) $G(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \cos x + 1$; 4) $G(x) = -\frac{x}{(x+1)^2} - 2$.

9) 1) $G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x - 3, & x \le -2 \\ -\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{3}, & x \in (-2, 2] \\ -3x + \frac{17}{3}, & x > 2 \end{cases}$; 2) $G(x) = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ -\frac{x^2}{2}, & x \in (0, 2] \\ \frac{x^2}{2} - 4x + 4, & x > 2. \end{cases}$

10) 1) Se scrie g sub forma $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases} =$

$= h(x) + i(x)$. Functia h fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$, iar funcţia i nu admite primitive pe $\mathbb{R}$ ($i(\mathbb{R}) = \{-1, 0\}$; i nu duce un interval ($\mathbb{R}$) într-un interval). Dacă prin absurd g ar admite primitive pe $\mathbb{R}$ atunci $g - h = i$ ar admite primitive pe $\mathbb{R}$, ca diferenţă a două funcţii care au primitive pe $\mathbb{R}$. Contradicţie, deoarece i nu admite primitive pe $\mathbb{R}$. Deci, în final, g nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Altfel. Să observăm că $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1 \neq g(0) = 0$, ceea ce arată că $x = 0$ este punct de discontinuitate de prima speţă pentru g. Transcriem în limbaj de vecinătăţi limita de mai sus. Oricare ar fi V o vecinătate a lui 1, atunci există U o vecinătate a lui $x = 0$ astfel încât $\forall\, x \in U - \{0\}$ să rezulte $g(x) \in V$. Cum U este vecinătate a lui $x = 0$ se deduce că există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$ şi deci pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}$ să rezulte $g(x) \in V$. Fie acum $V = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ o vecinătate particulară a lui 1. Conform celor de mai sus $g(x) > \frac{1}{2}$, dacă $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}$. Deci $g((-\varepsilon, \varepsilon)) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2};\ x \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}\right\}$, care nu este interval şi deci g nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Altfel. Cum $x = 0$ este punct de discontinuitate de prima speţă, se deduce că g nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$ şi deci g nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

11) O posibilă primitivă este $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Nu există $F'(0)$.

12) Se scrie f sub forma $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ k-1, & x = 0. \end{cases}$

Prima funcţie este continuă pe $\mathbb{R}$, şi deci admite primitive pe $\mathbb{R}$.
Trebuie ca şi a doua funcţie să admită primitive pe $\mathbb{R}$. Aceasta are loc dacă avem $k-1=0$ sau $k=1$.

Altfel. Cum $x=0$ este cel mult punct de discontinuitate de prima speţă ($\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, $f(0) = k$) se deduce că pentru a avea primitive, f trebuie să fie continuă în $x=0$, ceea ce conduce la $k=1$.

13) O primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, are forma $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x \leq 0 \\ x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

14) O primitivă $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, pe $[0,\infty)$ pentru f are forma

$F(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Din $F'(0) = 0$ se obţine $k = 0$.

15) $x=1$ poate fi cel mult punct de discontinuitate de prima speţă pentru f ($\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$), când f nu ar admite primitive. Deci f trebuie să fie continuă în $x=1$, când $k=1$.

16) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă neinjectivă. Deci există $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $F(a) = F(b)$. Se aplică funcţiei F teorema lui Rolle pe $[a,b]$. Prin urmare există $c \in (a,b)$ astfel încât $F'(c) = 0$, adică $f(c) = 0$.

17) Fie $G, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitive pentru g şi respectiv h. Au loc relaţiile

$(\sin x \cdot G(x))' = \cos x \cdot G(x) + f(x) \sin^2 x,$

$(\cos x \cdot H(x))' = -\sin x \cdot H(x) + f(x) \cos^2 x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, care adunate dau

$(\sin x \cdot G(x))' + (\cos x \cdot H(x))' = \cos x \cdot G(x) - \sin x \cdot H(x) + f(x),$

De aici f apare scris ca o sumă de funcţii ce admit primitive pe $\mathbb{R}$, şi deci admite primitive pe $\mathbb{R}$.

18) Din relaţiile de mai sus, deducem că f, g, h sunt funcţii derivabile. Adunând, membru cu membru, relaţiile din enunţ rezultă $f+g+h = 2(F+G+H)$, care prin derivare devine $(f+g+h)' = 2(f+g+h)$. Notând $f+g+h = u$ se obţine ecuaţia $u' = 2u$, care are soluţii de forma $u(x) = ke^{2x}$. Din relaţiile din definiţie rezultă $f' = g+h$, $g' = f+h$, $h' = f+g$. Din acestea şi $f(x)+g(x)+h(x) = ke^{2x}$ găsim $f'(x) + f(x) = ke^{2x}$, $g'(x) + g(x) = ke^{2x}$, $h'(x) + h(x) = ke^{2x}$. Pentru a găsi funcţia f, care verifică egalitatea $f'(x) + f(x) = ke^{2x}$, se înmulţeşte această relaţie cu e^x când avem $f'(x)e^x + f(x)e^x = ke^{3x}$ sau $(e^x f(x))' = ke^{3x}$ sau $e^x f(x) = \dfrac{k}{3}e^{3x} + C_1$ sau $f(x) = \dfrac{k}{3}e^{2x} + C_1 e^{-x}$. Analog se procedează pentru g şi h.

pag. 32. Testul 1. I. 1. a) $f(0+) = 0$, $f(1-0) = 1$; c) pe $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ f este strict crescătoare, iar pe $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ f este strict descrtescătoare;

d) $\max f = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq -\ln\frac{1}{2}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-1)\ln(1-a) - a\ln a \leq -\ln\frac{1}{2}, \forall a \in [0,1] \Rightarrow a\ln a + b\ln b \geq \ln\frac{1}{2}$,

$\forall a, b \in [0,1]$, $a+b=1$; **2.** a)-b) $f''(x) = \frac{1}{x(x-1)} < 0$, $\forall x \in (0,1)$;

c) $y + \ln\frac{\sqrt[4]{27}}{4} = \ln 3\left(x - \frac{1}{4}\right)$, $y + \ln\frac{\sqrt[4]{27}}{4} = -\ln 3\left(x - \frac{3}{4}\right)$; d) $A\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{4}{\sqrt[4]{9}}\right)$ aparţine celor trei drepte. **II. 1.** a) Polinomul $g - 15$ are rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Deci $X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d - 15 = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$. Formulele lui Viète dau $\sum x_1 = -a = 10 \Rightarrow a = -10$, $\sum x_1x_2 = b = 35$, $\sum x_1x_2x_3 = -c = 50 \Rightarrow c = -50$ şi $\prod x_1 = d - 15 = 24 \Rightarrow d = 39$. b) $g = (X^2 - 5X + 5)^2 + 14$, $q = X^2 - 5X + 5$, $r = 14$; **2.** a) 0; b) $f'(x) = (x+1)^2e^x > 0$; d) $a_{n+1} = a_n + 2$, $b_{n+1} = a_n + b_n$; e) $a_n = 2(n-1)$, $b_n = (n-1)(n-2)$; f) Limita cerută este egală cu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{n^3} = \frac{1}{3}$. **III. 1.** $A\left(3, -\frac{12}{5}\right)$, $B\left(3, -\frac{8}{5}\right)$, iar ecuaţiile tangentelor sunt $\frac{3x}{25} - \frac{4y}{15} = 0$, $\frac{3x}{25} - \frac{2y}{5} = 1$. Punctul de intersecţie al tangentelor este $\left(\frac{25}{3}, 0\right) \in Ox$. **2.** a) $y + 4z + 10 = 0$; b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$. **IV. 1.** a) $A(x)A(y) = A(x+y+xy)$, $\forall x, y > -1$; b) $f : G \to \mathbb{R}$, $f(A(x)) = \ln(x+1)$; **2.** Orice drum care pleacă din O şi ajunge în B este format din 6 segmente orizontale (sau 6 verticale) din cele $6+6=12$. Numărul de astfel de drumuri este egal cu $C_{12}^6 = 924$. Numărul de drumuri care pleacă din O şi ajung în A este $C_6^3 = 20$, iar numărul de drumuri care pleacă din A şi ajung în B este $C_6^3 = 20$. În final numărul de drumuri care pleacă din O şi ajung în B, trcând prin A, este egal cu $20 \cdot 20 = 400$. Probabilitatea cerută este egală cu $\frac{400}{924} = \frac{100}{231}$.

Testul 2. I. 1. a) $a = 1$; **2.** a) $T_{k+1} = C_{100}^k \sqrt{2}^{100-k}$, $0 \leq k \leq 100$; $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{2}^{100-k} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 2 \mid 100-k$, $0 \leq k \leq 100 \Leftrightarrow 2 \mid k$, $0 \leq k \leq 100 \Leftrightarrow k = 2p$, $0 \leq p \leq 50$. Deci 51 de termeni sunt raţionali; b) $T_k \leq T_{k+1}$ şi $T_{k+1} \geq T_{k+2} \Rightarrow k = 41$, iar T_{42} este termenul căutat; c) $(\sqrt{2}+1)^{100} = (3+2\sqrt{2})^{50} < 6^{50}$; **II. 1.** a) $f'(x) = 1 + \cos x$; b) $x + \sin x \geq x - 1$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, iar din $x + \sin x \leq x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ rezultă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; c) $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare şi deci injectivă; f continuă şi b) $\Rightarrow f$ surjectivă; d) $g'(2\pi) = \frac{1}{f'(2\pi)} = \frac{1}{2}$; **2.** a) $a = -1$, $b = 0$; b) 1°) $b_n = \frac{1}{2}\ln\frac{3(n+1)}{n+3}$; 3) $\frac{1}{2}\ln 3$; **III.** 1. b) $AB = 5\sqrt{2}$; c) $x + y - 8 = 0$; d) $C\left(-\frac{8}{5}, \frac{27}{5}\right)$; e) $(-10, 18)$; **2.** a) da; **IV. 1.** c) 1, 3; **2.** Se consideră evenimentele: A = prima bilă este roşie şi a doua neagră şi B = prima bilă este neagră şi a doua este roşie. Se cunoaşte

$P(A\cup B)=\frac{18}{35}$, unde $P(A)=\frac{r}{n}\cdot\frac{n-r}{n-1}$, $P(B)=\frac{n-r}{n}\cdot\frac{r}{n-1}$, r este numărul de bile roşii. Se obţin $r_1=6$, $r_2=9$.

Testul 3. I. 1. a) $D=(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$; b) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$; c) $f^{(n)}(x)=$ $=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{x^n}-\frac{1}{(x+1)^n}\right)$; d) 1; **2.** a) $x_V=\frac{a}{2}$, $y_V=-\frac{a^2+4a-12}{4}=$ $=-\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)+3$; b) $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow a\in(-6,2)$; c) $a\in\{2\}\cup(3,\infty)$; d) $a\in\{2\}\cup(3,\infty)$; e) $(2\log_a|x|-a)^2\le 0\Leftrightarrow\log_a|x|=$ $=\frac{a}{2}\Leftrightarrow|x|=a^{\frac{a}{2}}\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm a^{\frac{a}{2}}$; **II. 1.** a) $f'(x)=0\Rightarrow x_1=-1$, $x_2=1$, $(-1,3)$ punct de maxim local, $(1,-1)$ punct de minim local; b) f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-1,1)$; c) $(x-1)(x^2+x-1)=0$. **2.** a) $a=b=1$; b) $y=-\frac{1}{2}$ la $+\infty$, $y=2x+\frac{1}{2}$ la $-\infty$; **III. 1.** a) $(x+1)^2+(y-2)^2=8$; b) $y=2+2\sqrt{2}$, $y=2-2\sqrt{2}$; **2.** Pentru $t=0\Rightarrow A(3,1,-3)$, iar pentru $t=1\Rightarrow B(7,-3,-2)$. Punctele $A,B\in(\mathcal{P})$ şi deci $(d)\subset(\mathcal{P})$; **IV. 1.** a) $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{8}$; b) $(-\sqrt{5},-1)\cup(1,\sqrt{5})$; **2.** a) $a\ge 12$; b) $a=12$; c) $e=-3$; d) 5^n-4 prin inducţie.

Testul 4. I. 1. $\Delta=108$; $m_1=8$, $m_2=3$; **2.** $A_x\cdot A_y=A_{x+y-2xy}$, $x+y-2xy\ne\frac{1}{2}\Leftrightarrow(2x-1)(1-2y)\ne 0$; A_0 este element neutru; simetricul lui A_x este $A_{x'}$, cu $x'=\frac{x}{2x-1}$. **II. 1.** a) $-1\le\frac{2x}{1+x^2}\le 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deci $D=\mathbb{R}$; $D_{f'}=\mathbb{R}-\{\pm1\}$; b) Din $f'(x)=0$, $\forall x\in(-1,1)\Rightarrow f$ constantă, $f=0$ pe $[-1,1]$ $(f(-1)=f(1)=0)$; **2.** $F'(x)=f(x)$, $\forall x<\frac{3}{2}\Rightarrow a=$ $\frac{2}{5}$, $b=-\frac{1}{5}$, $c=-\frac{3}{5}$; **III. 1.** a) $C\left(3,-\frac{3}{2}\right)$, $r=\frac{\sqrt{65}}{2}$; b) $8x+y+10=0$; c) $CB<r\Rightarrow B\in\operatorname{Int}\mathcal{C}$; **2.** da; **IV. 2.** b) 1;

Testul 5. I. 1. $x=4$; **2.** b) Se verifică axiomele inelului comutativ; c) Nu; **3.** $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x_3=7$; **II. 1.** a) $a=-4$, $b=-12$; b) $y=0$ a.o. la $\pm\infty$, $x=-2$, $x=6$ a.v., $\left(2,-\frac{1}{16}\right)$ punct de maxim; **2.** $f(x)=\frac{2(x-1)}{x+1}-\ln x$ cu $f'(x)\le 0\Rightarrow f$ descrescătoare. Din $x\ge 1\Rightarrow f(x)\le f(1)=0$; **III. 1.** Punctul de intersecţie al înălţimilor este $H\left(-\frac{21}{23},-\frac{128}{23}\right)$; **2.** $(3,-4,0)$; A,B se află de aceeaşi parte a planului xOy; B_1 este simetricul lui B în raport cu planul; se scrie ecuaţia dreptei care trece prin A şi B_1; se rezolvă sistemul format din ecuaţiile dreptei obţinute şi cea a planului xOy.

IV. 1. c) $2^9(x-3)^{10}+3=3\Rightarrow x_1=x_2=\ldots=x_{10}=3$; **2.** a) $15-5m$; b) $m\ne 3$; c) $(1-\lambda,2+\lambda,\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

pag. 46. **1.** a) $\ldots+C$, 2) $\frac{1}{4}(2x^2-2x+1)e^{2x}+C$; 3) $(x^2-4x+3)e^x+C$;

4) $(x^3-3x^2+5x-4)e^x+C$; 5) $\left(\frac{x^3}{2}+\frac{7x^2}{4}-\frac{7x}{4}-\frac{1}{8}\right)e^{2x}+C$;

6) $\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C$; 7) $\frac{x^4}{32}(8\ln^2 x-4\ln x+1)+C$;

8) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$; 9) $\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$;

10)-11) Se calculează $\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2=\frac{1}{2}e^{2x}$, $\mathcal{I}_1-\mathcal{I}_2=-\frac{1}{4}e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)$;

12) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$; 13) $-\frac{\ln x+1}{x}+C$; 14) $-x\operatorname{ctg}x+\ln(\sin x)+C$;

15) $x\operatorname{tg}x+\ln(\cos x)+C$; 16) $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C$;

17) $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$; 18) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C$;

19) $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)+C$; 20) $\frac{e^x}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)+C$;

21) $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+C$; 22) $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C$;

23) $\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)+\frac{e^x}{2}\cos x+C$; 24) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-$

$-2x+C$; 25) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\arcsin x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C$;

26) $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$; 27) $x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$;

28)* $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(9x^2+1)+C$

29) $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+C$;

30) $-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}+C$; 31) $[\ln(\ln x)-1]\ln x+C$;

32) $\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{x-1}{1+x}-x+C$; 33)* $\mathcal{I}=\frac{1}{2}\int\ln x\frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}dx=$

$=-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C$; 34) $F(x)+C$, unde

$$F(x)=\begin{cases} x\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}+\ln(1+x^2), & x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\\ x\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}-\ln(1+x^2)+2\ln 2, & x\in(-1,1).\end{cases}$$

35)* Se integrează prin părţi în două moduri. Se obţin relaţiile:

$\mathcal{I}_1=xe^{\arcsin x}-\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_1=-\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x}+\mathcal{I}_2$.

De aici $\mathcal{I}_1=\frac{1}{2}(x-\sqrt{1-x^2})e^{\arcsin x}+C$, $\mathcal{I}_2=\frac{1}{2}(x+\sqrt{1-x^2})e^{\arcsin x}+C$;

36) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$; 37) $\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{4}+\frac{x\sqrt{x^2+1}}{8}-$

$-\frac{1}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$; 38) $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2+1)^3}-\frac{2}{15}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$;

39) $\frac{1}{6}(x^5-x^3-6x)\sqrt{x^2-4}-4\ln(x+\sqrt{x^2-4})+C$; 40) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+$
$+C$; 41) $\frac{x^3}{4}\sqrt{9-x^2}-\frac{9x}{8}\sqrt{9-x^2}+\frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3}+C$;
42) $-\frac{\cos x}{5\sin^5 x}-\frac{4\cos x}{15\sin^3 x}-\frac{8\cos x}{15\sin x}+C$; 43) $F(x)+C$, unde

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|, & x\le -1\\ \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{\pi}{4}, & x\in(-1,1)\\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+\frac{\pi}{2}, & x\ge 1\end{cases}$$

46) $F(x)+C$, unde

$$F(x)=\begin{cases}x\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})-\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}, & x\in(0,1)\\ \ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$$

2. 1) $\mathcal{I}_n=x\ln^n x-n\mathcal{I}_{n-1}$;
2) $\mathcal{I}_n=x^ne^x-n\mathcal{I}_{n-1}$, $\mathcal{I}_1=(x-1)e^x+C$, $\mathcal{I}_2=x^2e^x-2\mathcal{I}_1=$
$=(x^2-2x+2)e^x+C$, $\mathcal{I}_3=x^3e^x-3\mathcal{I}_2=(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$;
3) $\mathcal{I}_n=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)\mathcal{I}_{n-2}$; 4) $f(x)=\cos^{n-1}x$,
$g'(x)=\sin^m x\cos x$, $\mathcal{I}_{m,n}=\frac{1}{m+n}\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x+\frac{n-1}{m+n}\mathcal{I}_{m,n-2}$;
5) $f(x)=\sin^{n-1}x$, $g'(x)=\sin x$, $\mathcal{I}_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\mathcal{I}_{n-2}$;
6) $\mathcal{I}_n=\int\operatorname{tg}^{n-2}x(1+\operatorname{tg}^2x)\mathrm{d}x-\int\operatorname{tg}^{n-2}x\mathrm{d}x=\int\operatorname{tg}^{n-2}x(1+\operatorname{tg}^2x)\mathrm{d}x-\mathcal{I}_{n-2}$;
$f(x)=\operatorname{tg}^{n-2}x$, $g'(x)=\frac{1}{\cos^2x}$; $\mathcal{I}_n=\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x-\mathcal{I}_{n-2}$;
7) $\mathcal{I}_{n-2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2}x}=\int\frac{1-\cos^2x}{\sin^n x}\mathrm{d}x=\mathcal{I}_n-\int\cos x\frac{(\sin x)'}{\sin^n x}\mathrm{d}x$,
$f(x)=\cos x$, $g'(x)=\frac{(\sin x)'}{\sin^n x}$; $\mathcal{I}_{n-2}=\mathcal{I}_n+\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{1}{n-1}\mathcal{I}_{n-2}$,
adică $\mathcal{I}_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\mathcal{I}_{n-2}$;
8) $\mathcal{I}_n=\int\frac{x^{2n-2}(x^2+a^2)-a^2x^{2n-2}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-a^2\mathcal{I}_{n-1}$; $\mathcal{I}_0=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$;
9) $\mathcal{I}_n=\int\frac{1}{\cos^{2n-2}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}=\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^{2n-2}x}-(2n-2)\int\frac{\sin^2x}{\cos^{2n}x}\mathrm{d}x=$
$=\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^{2n-2}x}-(2n-2)\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2n}x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2n-2}x}\right)$;
$\mathcal{I}_n=\frac{\sin x}{(2n-1)\cos^{2n-2}x}+\frac{2n-2}{2n-1}\mathcal{I}_{n-1}$;
10) Prin părţi avem: $\mathcal{I}_n=-\frac{1}{n}\cos^n x\cos nx-\int\cos^{n-1}x\sin x\cos nx\mathrm{d}x$. La

această relaţie se adună $\mathcal{I}_n$ şi se obţine $\mathcal{I}_n = -\frac{1}{2n}\cos^n x \cos nx + \frac{1}{2}\mathcal{I}_{n-1}$.

3. Sunt funcţii continue pe domeniile de definiţie:

1) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|), & x\geq 1\\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}, & x<1\end{cases}$;

2) $F:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

3) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+4}+4\ln(x+\sqrt{x^2+4})], & x\leq 0\\ 2x-\cos x+1+2\ln 2, & x>0\end{cases}$;

4) $F:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2}+9\arcsin\frac{x}{3}\right), & x\in[0,3]\\ \frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}+\frac{9\pi}{4}, & x>3\end{cases}$;

5) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}(x-1)e^x, & x\leq 0\\ \frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}-1, & x>0\end{cases}$;

6) $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\text{arctg}x+\frac{1}{2}\text{arctg}x-\frac{x}{2}, & x\geq 0\\ x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}-1, & -1<x<0\end{cases}$;

7) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}x\ln(x^2+1)+2\text{arctg}x-2x, & x>0\\ \frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{4}, & x\leq 0\end{cases}$;

8) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x), & x\leq 0\\ (x-1)e^x+\frac{1}{2}, & x>0\end{cases}$;

9) $F:(-\infty,1]\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}, & x\in[0,1]\\ \frac{x^2}{2}\ln(-x)-\frac{x^2}{4}, & x<0\end{cases}$;

10) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3, & x\leq 0\\ \frac{2x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}, & x>0\end{cases}$;

11) $F:(-1,1)\to\mathbb{R},\ F(x)=x+(x-1)e^x+C$;

12) $F:(0,2)\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}, & x\in[1,2)\\ \frac{1}{5}(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}- & \\ -\frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}+\frac{8\sqrt{2}}{15}, & x\in(0,1)\end{cases}$;

13) $F:(0,2)\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}, & x\in(0,1]\\ \frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{5}{36}, & x\in(1,2)\,.\end{cases}$;

pag. 59. 1) $t=2x-1;\ \frac{1}{20}(2x-1)^{10}+C;$

2) $t=2x-1;\ \frac{1}{44}(2x-1)^{11}+\frac{1}{40}(2x-1)^{10}+C.$

3) $t=x-1;\ -\frac{1}{6(x-1)^6}-\frac{3}{7(x-1)^7}-\frac{3}{8(x-1)^8}-\frac{1}{9(x-1)^9}+C;$

4) $t=x^2-3x+8;\ \ln(x^2-3x+8)+C;$

5) $t=x^3+1;\ \frac{1}{3}\ln(x^3+1)+C;$ 6) $t=x^2;\ \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x^2)+C;$

7) $t=x^3;\ \frac{1}{6}\mathrm{arctg}\left(\frac{x^3}{2}\right)+C;$ 8) $t=e^x;\ \mathrm{arctg}(e^x)+C;$

9) $t=3+e^{-x};\ -\ln(3+e^{-x})+C;$ 10) $t=e^{-x};\ -\arcsin(e^{-x})+C;$

11) $t=e^x;\ \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2\mathrm{arctg}(e^x)+C;$ 12) $t=e^x;\ e^x+\ln(e^x-1)+C;$

13) $t=e^x;\ e^x-\ln(e^x+1)+C;$ 14) $t=\ln x;\ \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+C;$

15) $t=\ln x;\ \ln(\ln x)+C;$ 16) $t=1+\ln x;\ -\frac{1}{2(1+\ln x)^2}+C;$

17) $t=\ln x;\ -\frac{1}{2}\ln(\ln^2 x-1)+C;$ 18) $t=\ln x;\ \arcsin(\frac{\ln x}{\sqrt{3}})+C;$

19) $t=\ln(2x);\ \ln(\ln 2x)+C;$ 20) $t=\ln x;\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\ln x-\sqrt{2}}{\ln x+\sqrt{2}}\right)+C;$

21) $t=\ln x;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{5}}\right)+C;$ 22) $t=\ln x;\ \ln(\ln x+\sqrt{\ln^2 x+1})+C;$

23) $t=\ln x;\ \arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right)+C;$ 24) $t=\sin x;\ \ln(1+\sin x)+C;$

25) $t=\sin x;\ \mathrm{arctg}(\sin x)+C;$ 26) $t=\cos x;\ -\frac{1}{4}\ln\frac{2-\cos x}{2+\cos x}+C$

27) $t=\cos x;\ -\ln(\cos x+\sqrt{\cos^2 x+1})+C;$ 28) $t=\sin x;\ \arcsin\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$

29) $t=\cos^2 x;\ -\ln(4-\cos^2 x)+C;$ 30) $t=\sin^2 x;\ \arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)+C;$

31) $t = \operatorname{arctg} x$; $\ln(3 + \operatorname{arctg} x) + C$; 32) $t = \operatorname{arctg} x$; $\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right) + C$;

33) $t = \operatorname{arctg} x$; $\ln(\operatorname{arctg} x + \sqrt{\operatorname{arctg}^2 x + 5}) + C$; 34) $t = \operatorname{arctg} x$;

$\arcsin\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right) + C$ 35) $t = \operatorname{arctg} x$; $2\sqrt{\operatorname{arctg} x} + C$; 36) $t = \arcsin x$;

$\frac{1}{2}\arcsin^2 x + C$; 37) $t = \arcsin x$; $\ln(\arcsin x) + C$; 38) $t = \arcsin x$; $-\frac{1}{\arcsin x} + C$;

39) $t = \arcsin x$; $\ln\left(\arcsin x + \sqrt{\arcsin^2 x + 1}\right) + C$; 40) $t = \arcsin x$;

$\arcsin(\arcsin x) + C$; 41) $\mathcal{I} = \int \frac{x\,dx}{1+x^2} - \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$; Pentru prima integrală se substituie $x^2 + 1 = t$, iar pentru a doua $\operatorname{arctg} x = t$;

$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + C$; 42) $t = 4 - x^2$; $-\sqrt{4-x^2} + C$;

43) $t = x^3$; $\frac{1}{3}\ln(x^3 + \sqrt{x^6 - 16}) + C$; 44) $t = \sqrt{x}$; $-2\cos\sqrt{x} + C$;

45) Avem $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{\arccos x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; Pentru prima integrală se pune $t = 1 - x^2$, iar pentru a doua integrală $t = \arccos x$; $-\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos^2 x + C$;

46) Avem: $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}\,dx}{1+x^2} + \int \frac{x\ln(x^2+1)\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$.

Pentru prima integrală se pune $t = \operatorname{arctg} x$, iar pentru a doua $t = \ln(x^2+1)$;

$e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{4}\ln^2(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$; 47)* Se determină numerele m, n astfel încât $2\sin x + \cos x = m(\sin x + 2\cos x) + n(-2\sin x + \cos x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}\ln(\sin x + 2\cos x) + C$; 48) $-\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) + C$;

49) $t = x^2 - 4$; 50) $t = x^2 + 1$. 51) $t = e^x$ şi se ajunge la

$\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)[\ln(1+t) - \ln t]\,dt$, iar $\int \frac{\ln t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln^2 t + C$.

pag. 64. 1) $2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}} + C$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C$;

3) $-\arcsin\frac{1}{x} + C$; 4) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$; 5) $\arccos\frac{x+1}{2x} + C$;

6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x} + C$; 7) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$;

8) $-\ln(1 + e^{-x}) + C$; 9) $2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{4}(2 - x^2)\sqrt{4-x^2} + C$;

10) $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$; 11) $2\arcsin\sqrt{x} + C$. 12) $f(t) = 2\cos\frac{t}{2^n}$.

pag. 69. 1) $f(x) = \frac{4}{x-1} - \frac{11}{x-2} + \frac{7}{x-3}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+}$

3) $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}$; 4) $f(x)=x-2+\frac{17}{16(x+1)}-\frac{11}{4(x+1)^2}-$
$-\frac{17}{16(x-3)}$; 5) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)^3}+\frac{8}{(x-1)^4}$;
6) $f(x)=-\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2-x\sqrt{2}+1)}+\frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2+x\sqrt{2}+1)}$;
7) $f(x)=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$; 8) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$;
9) $f(x)=-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$; 10) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+x+1}-$
$-\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}$; 11) $f(x)=-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{x-2}{x^2+x+1}+\frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}$.

pag. 76. 1) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$;
3) $\sqrt{3}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right]+C$; 4) $\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+C$;
5) $\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; 6) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C$; 7) $\frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\frac{x^3-\sqrt{3}}{x^3+\sqrt{3}}+C$;
8) $\frac{5}{2}\ln(x^2+4)-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; 9) $x-\operatorname{arctg}x+C$; 10) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$;
11) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$; 12) $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;
13) $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5}+C$; 14) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+10)+C$;
15) $\frac{x^3}{3}-2x+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

pag. 78. 1) $\ln\frac{x-1}{x}+C$; 2) $\frac{1}{5}\ln\frac{(2x-3)^2}{x+1}+C$; 3) $\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x+4}+C$;
4) $\ln\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}+C$; 5) $\ln\frac{(x-2)^3}{x-1}+C$; 6) $-\frac{1}{4}\ln(x-1)+\frac{5}{4}\ln(x-5)+C$;
7) $\frac{1}{5}\ln[(x-2)^2\sqrt{2x+1}]+C$; 8) $\ln\frac{(x-2)^2}{x-3}+C$; 9) $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+C$;
10) $\frac{1}{2}\ln[x(x+2)]-\ln(x+1)+C$; 11) $\ln\frac{\sqrt{(x+1)(x+3)}}{x+2}+C$;
12) $-\frac{1}{8}\ln(x+1)+\frac{3}{4}\ln(x+3)-\frac{5}{8}\ln(x+5)+C$.
13) $\frac{x}{4}-2\ln x+\frac{17}{16}\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{15}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$;
14) $\ln\frac{x^3(x-1)}{x+1}+C$; 15) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln x+5\ln(x-2)-3\ln(x+2)+C$.
16) $\frac{1}{6}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)-\frac{1}{6}\ln(x+3)+C$.

pag. 80. 1) $x+2\ln(x+1)-\dfrac{1}{x+1}+C$; 2) $\dfrac{1}{x}+\ln(2-x)-\ln(-x)+C$;

3) $\ln(2-x)-\ln(-x-1)-\dfrac{2}{x+1}+C$; 4) $\ln\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}+C$;

5) $\ln(-x)-\ln(-x-1)+\dfrac{1}{x+1}+C$; 6) $\ln\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{6}{x+1}+C$;

7) $\dfrac{3}{2x}-\dfrac{5}{4}\ln(-x)+20\ln(3-x)-\dfrac{47}{4}\ln(2-x)+C$;

pag. 82. 1) $\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$; 2) $x+\ln\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}+C$;

3) $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

4) $\dfrac{1}{24}\ln\dfrac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}+C$; 5) $\dfrac{(x+1)^2}{2}+\ln\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+C$;

6) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]+C$;

7) $\ln\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{2}+C$;

8) $3\ln\dfrac{\sqrt{x^2-2x+5}}{-x}+2\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$; 9) $\ln\dfrac{(2x-1)^4}{(x+2)(\sqrt{x^2+1})^3}-4\operatorname{arctg}x+C$;

10)* Se scrie integrala sub forma $\int\ln(x^2-x+1)(x^2+x+1)\mathrm{d}x=$

$=\int\ln(x^2-x+1)\mathrm{d}x+\int\ln(x^2+x+1)\mathrm{d}x$ şi apoi se integrează prin părţi.

11)* Pentru $x\neq 0$ se pune $x+\dfrac{1}{x}=t$.

pag. 83. 1) $\dfrac{2-x}{4(x^2+2)}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2)-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$;

2) $\dfrac{7x+2}{3(x^2+x+1)}+\dfrac{14\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

3) $\dfrac{3(x-7)}{2(x^2-4x+9)}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2-4x+9)+\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{\sqrt{5}}+C$;

4) $\dfrac{x-1}{2(x^2+1)}-\dfrac{1}{2}\ln(x+1)+\dfrac{1}{4}\ln(x^2+1)+C$;

5) $-\dfrac{x+3}{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\ln(x-1)+C$;

pag. 86. 1) $\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$; 2) $x\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{x}+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x}\right)+C$;

3) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\dfrac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$;

4) $\dfrac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$; 5) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+C$; 6) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$;

7) $x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln(\sqrt[6]{x}-1)+C$;

8) $3\sqrt[3]{x}+3\ln(\sqrt[3]{x}-1)+C$; 9) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$;

10) $2[\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})]+C$; 11) $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3+6x^2+8x+16)+C$;

12) $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$; 13) $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-$

$-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$; 14) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+$

$+\frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-\frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C$; 15) $6\left[\frac{1}{9}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{(x+1)^4}+\right.$

$\left.\frac{1}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]+C$;

16) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$;

17) $\ln\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2u^2}{\sqrt{3}}+C$, unde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

18) $-\frac{1}{2}\ln\frac{(1-u)^2}{u^2+u+1}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, $u=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$;

19) Se amplifică expresia de integrat cu $1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$;

20) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-\ln(x+\sqrt{x^2+2})+C$;

21) $\frac{1}{2}(x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|)+C$; 22) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$;

23) $\mathcal{I}=\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$;

se pune $t=\frac{1}{x}$ şi se calculează integrala asociată;

$\sqrt{x^2+1}-\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}+C$;

24) Integrala este de forma $(Ax+B)\sqrt{x^2+x+1}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

$\frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$;

25) $\sqrt[6]{(x+1)^3}-\frac{3}{4}\sqrt[6]{(x+1)^2}+\frac{3}{4}\sqrt[6]{x+1}-\frac{3}{8}\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+\frac{1}{2}\right)+C$;

26) $\int\frac{(x^2-1)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\sqrt{x^2-1}-\mathcal{I}_1$, unde pentru

calculul lui $\mathcal{I}_1$ se notează $t=\frac{1}{x}$ şi integrala asociată este

$\mathcal{I}_1' = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C$. Deci $\mathcal{I} = \sqrt{x^2-1} + \arcsin\frac{1}{x} + C$;

27) $t = 2 - x^2$; $-\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{2-x^2} + C$.

28) $\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C$;

29) $\ln\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} + C$; 30) $\frac{-\sqrt{x^2+1}}{x} + C$;

pag. 98. 1) $\frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 6x + C$; 2) $3x + 4\sin x + \sin 2x + C$;

3) $\frac{3x}{2} + \cos 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$; 4) $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$;

$\frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$; 5) $-\frac{1}{8}(\cos 4x + 2\cos 2x) + C$; 6) $\frac{1}{4}\sin 2x -$

$-\frac{1}{16}\sin 8x + C$; 7) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{10}\sin 10x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$;

8) $\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$; 9) $\frac{3x}{128} - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x + C$;

10) $\frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$;

11) $t = \cos x$; $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$;

12) $t = \sin x$; $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$;

13) $t = \sin x$; $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$;

14) $\frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$; 15) $t = \cos x$; $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$;

16) $\frac{1}{\cos x} + \cos x + \mathrm{tg}x + C$; 17) $t = \cos x$; $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$;

18) $t = \mathrm{ctg}x$; $\ln(\mathrm{tg}x) - \frac{1}{2\mathrm{tg}^2 x} + C$; 19) $t = \mathrm{tg}x$; $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{ctg}^2 x) + 2\ln(\mathrm{tg}x) + C$;

20) $t = \mathrm{tg}x$; $\frac{(\mathrm{tg}^2 x - 1)(\mathrm{tg}^4 x + 10\mathrm{tg}^2 x + 1)}{3\mathrm{tg}^3 x} + C$;

21) $t = \mathrm{tg}x$; $\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4} - \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \ln(\cos x) + C$;

22) $x - \frac{\mathrm{ctg}^7 x}{7} + \frac{\mathrm{ctg}^5 x}{5} - \frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3} + \mathrm{ctg}x + C$;

23)* Pentru $x \in (0,\pi)$, avem $G(x) = \frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4}{3}$ o primitivă pentru $f(x) = \frac{1}{5+4\sin x}$. Cu ajutorul lui G se construieşte primitiva F pe $(0,2\pi)$ pentru f;

24) $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2})+C$; 25) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$;

26) $\ln\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$; 27) $\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{4}+C$; 28) $\frac{1}{5}\ln\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$;

29) $\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}+C$; 30) $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}\right|+C$; 31) $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C$;

32) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}+C$; 33) $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+C$;

34) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$;

35) $t=\operatorname{tg}x$; $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-2}{\sqrt{2}}+C$;

36) $t=\operatorname{tg}x$; $-\frac{1}{5\operatorname{tg}^5x}-\frac{2}{3\operatorname{tg}^3x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}+C$; 37)* $F(x)+C$, unde

$$F(x)=\begin{cases}2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}, & x\in[0,\pi)\\ 2\sqrt{2}, & x=\pi\\ -2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+4\sqrt{2}, & x\in(\pi,2\pi];\end{cases}$$

38) $-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}\cos^2x\sqrt{\cos x}+C$; 39) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+\sin^2x}-1}{\sqrt{1+\sin^2x}+1}+C$;

40) $t=\sqrt{\sin x}$; $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}+C$. 41) Dacă $\mathcal{I}$ este integrala dată, iar $\mathcal{J}=\int\frac{(e^x+\cos x)\mathrm{d}x}{e^x+\sin x+\cos x}$ atunci $\mathcal{I}+\mathcal{J}=x+C$ şi $\mathcal{J}-\mathcal{I}=$ $=\ln|e^x+\sin x+\cos x|+C$. 42) Se ia $\mathcal{J}=\int\frac{(e^x+\cos x)\mathrm{d}x}{e^x+\sin x_+\cos x}$ şi se calculează $\mathcal{I}+\mathcal{J}=x+C$, $\mathcal{I}-\mathcal{J}=\ln(e^x+\sin x+\cos x)+C$;

43) $5\sin x+3\cos x=A(6\sin x+2\cos x)+B(6\sin x+2\cos x)'$;

44)* Numărătorul se scrie sub forma $1+\frac{(\sin x+x\ln x)'}{\sin x+x\ln x}$. 45) Dacă I este integrala dată, iar $\mathcal{J}=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{e^x-\cos x-\sin x}$ atunci calculăm $\mathcal{I}+\mathcal{J}$ şi $\mathcal{I}-\mathcal{J}$.

pag. 100. 1) $\ln(e^x-1)+C$; 2) $\frac{1}{\ln 3}\operatorname{arctg}3^x+C$; 3) $e^x-2\ln(1+e^x)+C$;

4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$; 5) $\frac{e^{2x}}{2}-e^x+\ln(1+e^x)+C$; 6) $-\ln(3+e^{-x})+C$;

7) $\frac{1}{3}\ln(1+e^x)-\frac{1}{6}\ln(e^{2x}-e^x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2e^x-1}{\sqrt{3}}+C$;

8) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x}{2-e^x}\right)+C$; 9) $-x-e^{-x}+\ln(e^x+1)+C$;

10) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln(4+e^{2x})+C$; 11) $e^{-x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)+C$;

12) $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln(e^x-1)+\frac{1}{6}\ln(2+e^x)+C$; 13) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{e^{2x}-\sqrt{2}e^x+1}{e^{2x}+\sqrt{2}e^x+1}+$
$+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}e^x-1}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}e^x+1}{2}\right)\right]+C$;

14) $\frac{1}{4}\ln\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+C$; 15) $\ln\frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x}+\frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}e^x+C$.

pag. 101. Teste de evaluare. Testul 1. 1. Se arată că f este continuă pe $\mathbb{R}$; **2.** a) $f(x)=1+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$; $x+2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}+C$; b) $f(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-2}$, $\ln|\frac{x-2}{x}|+\frac{1}{x}+C$; c) Integrare prin părţi: $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C$; **3.** F este derivabilă şi $F'=f$; **4.** Din $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă $a=-1$, $b=-2$; **5.** $F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$.

Testul 2. 1. a) $m=2$; b) $F(x)=2x+x\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}$, $x\le 0$ şi $F(x)=x-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{3}{2}$, $x>0$; **2.** a) $\operatorname{tg}x=t$; $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}})+C$; b) $t=e^x$; $\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+4\ln(2+e^x)+C$; c) $t=x-1$ şi avem de calculat $\int\frac{(t+1)^3}{t^4}\mathrm{d}t=\int\frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^4}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}+3\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^4}$, etc.; **3.** G este derivabilă şi $G'=g$; **4.** Se derivează egalitatea şi se identifică; $a=\frac{1}{2}$, $b=3$, $c=-2$; **5.** $F_1(x)=\frac{x^3}{3}+1$ şi $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{7}{3}$. **Testul 3. 1.** b); **2.** c); **3.** a); Abscisa punctului de tangenţă se determină din ecuaţia $(x^2)'=x+2$. De aici $x=2$ când $y=4$. O primitivă F a lui f este $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+c$, iar c se determină din cerinţa $F(2)=4$. Rezultă $c=-2$; **4.** c).

pag. 103. 1. $-\ln|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}|+C$; **2.** a); **3.** f admite primitive $\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$; **4.** f continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$;

$F(x)=\begin{cases}(x-1)e^x, & x\le 0\\ \frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)-1, & x>0\end{cases}$ şi $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$; **5.** f con-

tinuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$; $F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} - 2x - 4, & x \leq -2 \\ \frac{x^2}{2} + 2x, & x \in (-2, 0]; \\ 2x, & x > 0. \end{cases}$

6. a) $x^2 + e^x + C$; b) $x - \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$; c) $\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$; **7.** Se amplifică fracţia cu expresia conjugată; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$; **9.** c); **10.** 2) $F(x) = x(\ln x - 1)$; 3) $F_1(x) = \begin{cases} F(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; **11.** d); **12.** d); **13.** d); **14.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-1+1} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; **15.** $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}x + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} + C$; **17.** c); **19.** $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; **20.** d) **21.** $\frac{2}{3}\arcsin(x\sqrt{x}) + C$; **22.** b); **23.** $a = b = -\frac{1}{2}$; b); **24.** d). **25.** 1) $\Delta > 0$, $P > 0$, $S < 0$; $m \in \left(0, \frac{4}{3}\right]$; 2) $m = 1$; 3) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$, $x \leq 0, F(x) = x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{2}$, $x > 0$; $G(x) = F(x) + k$, $x \in \mathbb{R}$; **26.** $f(x) = x^2 + a$, $x < 0$, $f(x) = \frac{a}{2}, x = 0, f(x) = x, x > 0$; c); **27.** F continuă şi derivabilă în $x = e; a = \frac{3}{e}, b = -2; d)$;

pag. 106. Testul 1. I. 1. Se împart ambii membrii prin 2^x. Soluţie unică $x = 2$; b) $x = 4$; c) Se utilizează formula $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$; $S = \left\{\pm\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; e) Progresie aritmetică; $x = 55$; f) 5; g) $x = 1$ rădăcina comună pentru $a = -2$; **2.** Există două puncte $A_1(0,0)$, $A_2(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{8})$. **II. 1.** a) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strict descrescătoare; b) Conform cu a) $\Rightarrow (x_n)$ strict descrescător; din $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$ se deduce că şirul este mărginit inferior, iar din $x_n < x_1 = \sqrt{2}-1$, $\forall n \geq 1$, se deduce că şirul este mărginit superior; c) 0; **2.** a) $\det(A) = 0$; b) sistem compatibil simplu nedeterminat $\operatorname{rang}(A) = rang(\overline{A}) = 2$, $\overline{A}$ este matricea extinsă a sistemului; c) $x = 1 + \lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(0, 1, -1)$, $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. **III. 1.** a) $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1$; b) $M(-1, 2)$, $\frac{x_M + x_A}{2} = x_B$, $\frac{y_M + y_A}{2} = y_B$, $N(4, 3)$, $P(0, -2)$; c) Se arată că $x_G = \frac{x_M + x_N + x_P}{3}$, $y_G = \frac{y_M + y_N + y_P}{3}$; **2.** Se impune condiţia $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. De aici $\alpha = 4$; **3.** Arătăm că vectorul director al dreptei $\overline{v} = (3, -4, 4)$ este perpendicular pe vectorul normal al planului $\overline{n} = (4, -3, -6)$ şi în plus există un punct al dreptei

care nu este în plan. Avem $\overline{n}\,\overline{v} = 3 \cdot 4 + (-4)(-3) + 4(-6) = 0$, iar punctul $A(-2, 1, -5)$ este pe dreaptă ($t = 0$) dar nu este în plan $(4(-2) - 3(1) - 6(-5) - 5 \neq 0)$; **IV. 1.** a) $\sum x_1^2 = (\sum x_1)^2 - 2\sum x_1 x_2 = 4 - 2a$; b) $\sum x_1^2 = -2 < 0 \Rightarrow$ nu toate numerele x_1, x_2, x_3, x_4 sunt reale; c) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -\frac{1}{2}$; $-1 \pm \sqrt{2}$, $\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$; **2.** a) f este strict crescătoare (ca sumă de astfel de funcţii) şi deci injectivă (altfel $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$). Din $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ şi f continuă rezultă $f((0, \infty)) = \mathbb{R}$, adică f este surjectivă; b) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ pentru care $f(x_0) = 1$. De aici $x_0 = 1$; c) F este derivabilă pe $(0, \infty)$ şi $F'(x) = f(x)$, $\forall x > 0$. **Testul 2. I. 1.** a) $[3, \infty)$; b) $(1, \infty)$; c) $(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \cup (\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; d) $\{0, 1, 2, 3\}$; **2.** a) $l_d(0) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$; b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}$; c) $x = 0$ a.v. la dreapta; d) $f(1) = 1 > 0$, $f(2) < 0$ şi f continuă ($\Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux) $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (1, 2)$ pentru care $f(x_0) = 0$. Funcţia f fiind injectivă (din f strict descrescătoare, $f'(x) < 0$) se deduce că x_0 este unic; e) Trebuie arătat că există un unic punct $x_1 \in (0, \infty)$ pentru care $f'(x_1) = -1$. Avem: f' continuă, $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = -\infty$ şi f' este strict crescătoare (deoarece $f''(x) > 0$). Cum $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$, deducem $f'((0, \infty)) = (-\infty, 0)$. Deci există $x_1 > 0$ astfel încât $f'(x_1) = -1$. Punctul x_1 este unic din injectivitatea lui f'. **II. 1.** a) $a = 5$, $b = 8$; b) $x_1 = -1 - i$, $x_2 = \overline{x_1} = -1 + i$, $x_3 = -a + 2 = -3$; c) $\sum x_1 x_2 - 4\sum x_1 + 12 = 40$; **2.** a) $b_0 = 3$, $q = \dfrac{2}{3}$, $b_n = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $a_n = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 3$; b) $T_n = 9\left[1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$, $S_n = \dfrac{1}{2}T_n - 3n$, $T_n \to 9$, $S_n \to -\infty$. **III. 1.** a) $m = -\dfrac{3}{2}$ (ecuaţia generală a celei de-a doua drepte este $3x + 2y - 18 = 0$); b) Se adună cele două ecuaţii parametrice pentru fiecare dreaptă şi rezultă aceeaşi ecuaţie generală $x + y - 15 = 0$; c) Dreptele sunt perpendiculare dacă produsul pantelor este egal cu -1; **2.** $M(x, y, z)$ este un punct curent al dreptei AB. Deci vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AM}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{AM} = \alpha\, \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$. De aici $x = x_A + \alpha(x_B - x_A)$, $y = y_A + \alpha(y_B - y_A)$, $z = z_A + \alpha(z_B - z_A)$. Punctul de intersecţie al dreptei cu planul xOy este (x_0, y_0, z_0) cu $z_0 = 0$ $(\Rightarrow 0 = 1 + \alpha(-5 - 1) \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{6})$. Găsim $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 0)$. Analog pentru celelalte puncte de intersecţie; **3.** $C(6, 1, 19)$, $D(9, -5, 12)$, $x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2}$, $y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2}$, $z_E = \dfrac{z_A + z_C}{2}$; **IV. 1.** a) $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$, $c = \dfrac{3}{4}$;

b) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{x^2+3}}{x+1}+\frac{\sqrt{3}}{4}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; **2.** a) $x*y>2,\ \forall x,y>2,\ e=3\in G$, $x'=\frac{2x-3}{x-2}\in G,\ \forall x\in G$. **Testul 3. I. 1.** a) 0; b) $C=X^2-7X+12$, $R=0$; c) $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4$; d) $\frac{1}{2(X-2)}-\frac{1}{X-3}+\frac{1}{2(X-4)}$; **2.** a) $a=1,\ b=0$; b) descrescătoare pe intervalele $(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$ şi crescătoare pe intervalul $[-1,1]$; c) $y=0$ a.o., $m(-1,-\frac{1}{2})$, $M(1,\frac{1}{2})$; **II. 1.** a) -2; b) 1; c) $\frac{-15+5\sqrt{5}}{2}$; d) 10; e) $\{2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$; 2) $f''(x)=0\Rightarrow x^2-2=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$; $I_1(\sqrt{2},-20)$, $I_2(-\sqrt{2},20)$; **III. 1.** a) $(x-\frac{8}{3})^2+(y-1)^2-\frac{145}{9}=0$; b) $y-5=-\frac{1}{12}(x-3)$; c) $\frac{16}{3}$; **2. metric:** $AB=BC=\sqrt{10}$, $AC=2\sqrt{10}$; **vectorial:** $\overrightarrow{AC}=\alpha\ \overrightarrow{AB}\Rightarrow\alpha=2$; **utilizând panta dreptei:** $m_{AB}=m_{AC}=3$. **IV. 1.** a) $A^2=\begin{pmatrix}-1&-4\\8&7\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}-9&-11\\22&13\end{pmatrix}$; b) Verificare prin calcul direct; c) inducţie; d) Prin absurd, dacă există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n=I_2$, atunci $\det(A^n)=1$ sau $(\det(A))^n=1$, adică $5^n=1$, fals; **2.** a) $f(x)=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$; b) $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+C$; **Testul 4. I. 1.** $a\geq\frac{10}{3}$; **2.** a) $(1,\infty)-\{2\}$; b) $x=-2$ punct de extrem; **II. 1.** a) Doar $x=4,\ y=8,\ z=0,\ t=0$ este soluţie a sistemului; b) $x=\lambda,\ y=2\lambda-8\mu,\ z=-3\mu,\ t=\mu,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$; **2.** a) $y=0$ a.o. la $\pm\infty$; b) $f'(x)=\frac{-8}{(x^2+1)(x^2+5)}$; c) $x=0$ punct de maxim; din monotonie rezultă $0<f(x)\leq f(0)=\ln 5$. **III. 1.** a) $C(0,4)$, $R=4$; b) $0^2+(-2-4)^2=16$, fals; deci A nu aparţine cercului; $B_1\left(\frac{4\sqrt{5}}{3},\frac{20}{3}\right)$, $B_2\left(-\frac{4\sqrt{5}}{3},\frac{20}{3}\right)$; ecuaţiile tangentelor sunt: $x\sqrt{5}+2y-20=0$, $-x\sqrt{5}+2y-20=0$; pantele dreptelor $m_1=-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $m_2=\frac{\sqrt{5}}{2}$; **2.** $\overrightarrow{AC}=(-5,3,-1)$, $\overrightarrow{BD}=(-6,-9,3)$. Diagonalele $[AC]$ şi $[BD]$ sunt perpendiculare dacă vectorii $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ sunt ortogonali; adică dacă produsul lor scalar este nul. Avem: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(-5)(-6)+3(-9)+(-1)(3)=30-27-3=0$;

IV. 1. Se derivează egalitatea şi se identifică. Rezultă $a=\frac{1}{2}$, $b=3$, $c=-2$;

2. a) Dacă $x_0\in\mathbb{R}$ este o rădăcină a ecuaţiei, atunci $x_0^3-2x_0^2-x_0+2+i(3x_0^2-4x_0+1)=0\Leftrightarrow x_0^3-2x_0^2-x_0+2=0$ şi $3x_0^2-4x_0+1=0$. De aici $x_0=1$, iar celelalte rădăcini sunt $x_1=-i$, $x_2=1-2i$;

b) Fie $x_0\in\mathbb{Z}$, rădăcină a ecuaţiei. Deci $(x_0^3-8x_0^2-6x_0+108)+\sqrt{3}(x_0^2+2x_0-48)=0$. De aici fiecare paranteză se anulează când $x_0=6$, etc.

Testul 5. I. 1. $x \in \left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right\}$; **2.** a) Coeficienţii sunt C_n^0, $\frac{C_n^1}{2}$, $\frac{C_n^2}{4}$; $n = 8$; b) T_1, T_5; **3.** b) $u = e^3 + 2 \in G$, $x' = e^{\frac{9}{\ln(x-2)}} + 2 \in G$; **II. 1.** a) $a = b = 1$; b) $y = -\frac{1}{2}$ a.o. la ∞, $y = 2x + \frac{1}{2}$ a.o. la $-\infty$; **2.** a) $f'(x) = (\ln 5)(5^{1+x} - 5^{1-x} + 2 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^{-2x}) = 0 \Rightarrow x = 0$ punct de minim pentru f; f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, \infty)$; b) Şirul lui Rolle; $m < 12$, ecuaţia nu are soluţii reale; $m = 12$, $x_1 = x_2 = 0$; $m > 12$, ecuaţia are două soluţii reale $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, \infty)$. **III. 1.** a) $BC = AC = 5$; b) $x + 2y - 3 = 0$ este ecuaţia mediatoarei lui $[AB]$, iar $x = \frac{1}{2}$ este ecuaţia mediatoarei lui $[BC]$. Centrul cercului are coordonatele $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ iar raza cercului este $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}$; **2.** $D_1(-3, 4, -4)$, $D_2(1, -2, 8)$, $D_3(5, 0, -4)$; **IV. 1.** b) $X^5 - 1 = (X - 1)f$; c) din b); d) $f = \prod(X - x_1) \Rightarrow A = f(y_1)f(y_2) = 1$; **2.** b) strict crescătoare; d) $y = x + 1$. **Testul 6. I. 1.** a) $m \geq 0$; b) $x_{min} = 3$, $y_{min} = f(3) = m$; c) $f(x) = (x - 3)^2$ dacă $m = 0$, iar $(f \circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow [(x - 3)^2 - 3]^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 3$. Deci $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$; **2.** $C = X^2 - 2X + 5$, $R = -9$; **3.** a) $q_a = \frac{1}{2}$, $q_b = 9$; b) Pentru $n = 1 \Rightarrow A_1(-1, 2)$, iar pentru $n = 2 \Rightarrow A_2(-2, 4)$, $2x + y = 0$; **II. 1.** a),b) prin calcul direct; c) $x, y < 5 \Rightarrow x * y < 5 \Leftrightarrow -(x - 5)(y - 5) + 5 < 5$; **2.** b) $f'(0) = 2$, $f''(0) = 2^2, ..., f^{(n)}(0) = 2^n$; 2; **III. 1.** a) $M(2, 2)$; b) $y = x$; 2; **IV. 1.** a) $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A) = 1$; b) O_3; d) Din c) $\Rightarrow I_3 = 2B - B^2 = B(2I_3 - B) = B(I_3 - A) = (I_3 - A)B \Rightarrow$ inversa lui B este $I_3 - A$; e) Formula lui Newton; $B^n = (A + I_3)^n = nA + I_3$ pentru că $A^k = O_3$, $\forall k \geq 2$; **2.** a) $f'(0) = 0$, $f(0) = 1 \Rightarrow m = 1$, $n = -1$; b) $x = 1$ a.v., $y = x + 2$ a.o. la $\pm\infty$; $x = 0$ punct de max, $x = 2$ punct de min; c) $M_0\left(3, \frac{11}{2}\right)$, $m = f'(3) = \frac{3}{4}$, $3x - 4y + 13 = 0$

II. INTEGRALE DEFINITE

2.1. Calculul integralei Riemann pentru funcţii continue cu ajutorul formulei Leibniz-Newton

Am văzut în capitolul **Primitive** că orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admite primitive pe $[a, b]$. Demonstraţia acestei afirmaţii este realizată în capitolul III. Fie F o astfel de primitivă. Dacă în plus f ia valori pozitive (aceasta înseamnă că graficul lui f este situat deasupra axei Ox), atunci aria S delimitată de graficul lui f, axa Ox şi dreptele verticale $x = a$, $x = b$ se exprimă cu ajutorul unei integrale definite

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Numărul $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ îl citim: integrala definită de la a la b din funcţia f sau integrala definită a funcţiei f pe $[a, b]$ sau simplu integrală de la a la b din $f(x)\mathrm{d}x$.
Acest rezultat este cunoscut sub numele de

Formula Leibniz-Newton (1675). Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, iar $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f pe $[a, b]$. Atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

În capitolul III este prezentată o demonstraţie a formulei lui Leibniz-Newton.

Observaţii. 1. În loc de $F(b) - F(a)$ se foloseşte notaţia $F(x)\Big|_a^b$ (citim: $F(x)$ luat între a şi b).

2. Variabila x se numeşte **variabila de integrare.** Integrala definită a unei funcţii continue pe $[a, b]$ este **un număr real**, care nu depinde de variabila de integrare (care se poate nota cu orice literă $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$

$= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)ds$), în timp ce integrala nedefinită a lui f pe $[a,b]$ este **o mulţime de funcţii** (mulţimea tuturor primitivelor lui f pe $[a,b]$).

3. Capetele intervalului $[a,b]$, deci a, b se numesc **capetele de integrare** în integrala definită.

4. Integrala definită $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ mai este cunoscută şi sub denumirea de integrala Riemann.

5. Simbolul $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a fost dat de G.W. Leibniz. Simbolul $\int$ este un s latin alungit, care provine din $\sum$ grecesc, iar $\mathrm{d}x$ corespunde creşterii Δx de forma $(x_i - x_{i-1})$.

Exemple. **1.** Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $\forall x \in [a,b]$ (funcţia constantă). Atunci o primitivă a lui f pe $[a,b]$ este $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = cx$, iar $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = cb - ca = c(b-a)$.

2. Să considerăm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ pentru care o primitivă $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ este $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Acum integrala definită pe $[a,b]$ este egală cu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = \frac{b^2 - a^2}{2}$

Probleme rezolvate

Să se aplice formula Leibniz-Newton pentru calcularea următoarelor integrale definite:

1) $\int_0^1 (x^2 + e^x)\mathrm{d}x$; 2) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$; 3) $\int_4^7 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 6}$;

4) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1}$; 5) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{x}}$; 6) $\int_2^3 \sqrt{x^2 - 4}\mathrm{d}x$;

7) $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4}\mathrm{d}x$; 8) $\int_0^1 (2x-1)^9\mathrm{d}x$; 9) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$;

10) $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4 + 1}}$; 11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos x}$; 12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x\mathrm{d}x$;

13) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x-1}}$; 14) $\int_0^1 \frac{x^3\mathrm{d}x}{x-2}$; 15) $\int_3^4 \frac{(2x-1)\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$;

16) $\int_2^3 \frac{(x^3+1)\mathrm{d}x}{x^3-x^2}$; 17) $\int_{-3}^{-2} \frac{(x+2)\mathrm{d}x}{x^3-2x^2}$; 18) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2}$;

19) $\int_1^2 x\sqrt{(x-1)^3}\mathrm{d}x$; 20) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$; 21) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 4x\mathrm{d}x$;

22) $\int_0^2 \mathrm{x}-1\mathrm{d}x$; 23) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x+\cos x}$.

R. 1) O primitivă a funcţiei de sub semnul integrală este $F(x)=\frac{x^3}{3}+e^x$. Conform formulei Leibniz-Newton integrala definită este egală cu $\int_0^1 (x^2+e^x)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}+e^x\right)\Big|_0^1 = e-\frac{2}{3}$. □

2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2$.□

3) $\int_4^7 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+6} = \int_4^7 \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x = (\ln|x-3|-$

$-\ln|x-2|)\Big|_4^7 = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Big|_4^7 = \ln\frac{8}{5}$. □

4) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 =$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{2}-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{4}{7}$. □

5) O primitivă a funcţiei de sub semnul integrală este funcţia $F(x)=$

$= 2(x-\ln(x+1))$. Integrala definită este egală cu $F(x)\Big|_0^1 = 2\left(\ln\frac{e}{2}\right)$.□

6) $\int_2^3 \sqrt{x^2-4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-4}-4\ln(x+\sqrt{x^2-4})]\Big|_2^3 =$

$= \frac{1}{2}\left[3\sqrt{5}+\ln\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^4\right]$; □ 7) $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+4}+4\ln(x+\sqrt{x^2+4})\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4+\frac{1}{2}\sqrt{5}$;□

8) $\int_0^1 (2x-1)^9 \mathrm{d}x = \frac{1}{20}(2x-1)^{10}\Big|_0^1 = 0.$ ⌙

9) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\ln x}\right)^3\Big|_1^e = \frac{2}{3};$□

10) $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2});$□

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \mathrm{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1;$□

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \mathrm{d}x = \frac{\sin^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4};$□

13) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x-1}} = [2\sqrt{x-1} - 2\ln(1+\sqrt{x-1})]\Big|_1^2 = 2(1-\ln 2);$ □

14) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\ln(2-x)\right]\Big|_0^1 = \frac{16}{3} - 8\ln 2;$ □

15) $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = \ln\frac{(x-2)^3}{x-1}\Big|_3^4 = \ln\frac{8}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{16}{3};$□

16) $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = \left[x - \ln x + \frac{1}{x} + 2\ln(x-1)\right]\Big|_2^3 = \ln\frac{8}{3} + \frac{5}{6};$□

17) $\int_{-3}^{-2} f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{x} + \ln(2-x) - \ln(-x)\right]\Big|_{-3}^{-2} = \ln\frac{6}{5} - \frac{1}{6};$□

18) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{2(x^2+1)}\right]\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} - \frac{3}{20};$□

19) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{7}(\sqrt{x-1})^7 + \frac{2}{5}(\sqrt{x-1})^5\right]\Big|_1^2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{5} = \frac{24}{35};$□

20) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x} - \arcsin\sqrt{x}]\Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2};$ □

21) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4};$□

22) Funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, & x\in[1,2] \\ 1-x, & x\in[0,1) \end{cases}$ fiind continuă admite ca primitivă pe $F:[0,2]\to\mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x, & x\in[1,2] \\ x - \frac{x^2}{2} - 1, & x\in[0,1). \end{cases}$

Deci $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \left(\frac{4}{2} - 2\right) - (-1) = 1.\square$

23) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}} + \operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{7}}.\square$

Probleme propuse

1. Să se aplice formula Leibniz-Newton pentru calcularea următoarelor integrale definite:

1) $\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$; 2) $\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x$; 3) $\int_3^5 x\sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x$;

4) $\int_0^3 x\sqrt{x^2+16}\mathrm{d}x$; 5) $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$; 6) $\int_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x$;

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\mathrm{d}x$; 8) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$; 9) $\int_0^1 \ln(x^2+1)\mathrm{d}x$;

10) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$; 11) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$; 12) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\mathrm{d}x$;

13) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$; 14) $\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$; 15) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^3}}$;

16) $\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$; 17) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+5}$; 18) $\int_0^1 \frac{(x+1)\mathrm{d}x}{x^2+2x+10}$;

19) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x}$; 20) $\int_1^2 \frac{(x^2-3x+2)\mathrm{d}x}{x(x+1)^2}$; 21) $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^3-2x^2+1}$;

22) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2(x^2+1)}{x^2+4}\mathrm{d}x$; 23) $\int_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; 24) $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;

25) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\mathrm{d}x$; 26) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$; 27) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\mathrm{d}x$;

28) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$; 29) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^5 x\mathrm{d}x$; 30) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2}$;

31)* $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{4-3\cos x}$; 32)* $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+2\sin^2 x}$;

2. Să se determine funcţia polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Fie $y > 0$ şi $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y + \cos x}\mathrm{d}x$. Studiaţi continuitatea lui F în $y = 1$.

Integrabilitatea unei funcţii în sensul lui Riemann (facultativ)

Sume Riemann şi integrala definită. Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Se numeşte **diviziune** a intervalului $[a, b]$ un sistem finit de puncte $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n)$, $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ şi $x_i < x_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$, $x_0 = a$ (primul punct al diviziunii), $x_n = b$ (ultimul punct). Punctele x_i se numesc **puncte de diviziune**. Notăm $\mathcal{D}_{a,b}$ mulţimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$. Pentru diviziunea D, numărul pozitiv $\| D \| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$ se numeşte **norma diviziunii** D. Diferenţa $x_i - x_{i-1}$ reprezintă lungimea intervalului $[x_{i-1}, x_i]$. Deci norma diviziunii D este cea mai mare dintre lungimile intervalelor $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $D = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ şi punctele $\xi_1 \in [x_0, x_1]$, $\xi_2 \in [x_1, x_2], \ldots, \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ (numite **puncte intermediare** ale diviziunii). Numărul $\sigma_D(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ se numeşte **suma Riemann** asociată funcţiei f, diviziunii D şi punctelor intermediare ξ_i.

Dacă $f \ge 0$, iar $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ (**subgraficul** lui f) reprezintă mulţimea punctelor din plan delimitată de graficul funcţiei, axa Ox şi dreptele verticale $x = a$ şi $x = b$, atunci termenul sumei $\sigma_D(f, \xi_i)$, $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ reprezintă aria dreptunghiului de bază $x_i - x_{i-1}$ şi înălţime $f(\xi_i)$ şi aproximează aria trapezului curbiliniu determinat de graficul funcţiei, axa Ox şi dreptele $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ (figura de mai jos).

Numărul $\sigma_D(f, \xi_i)$ aproximează aria subgraficului lui f.

Are loc următoarea

Definiţie. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se spune că f **este integrabilă Riemann pe** $[a,b]$ dacă **oricare ar fi şirul de diviziuni** $D_n = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}) \in \mathcal{D}_{[a,b]}$, $n \in \mathbb{N}^*$ cu $\| D_n \| \xrightarrow{n} 0$, şi **oricare ar fi sistemul de puncte intermediare** $x_{i-1}^n \leq \xi_i^n \leq x_i^n$, $i = \overline{1, k_n}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{D_n}(f, \xi_i^n))_n$ **este convergent la acelaşi număr real.**

Numărul real din această definiţie, $\lim_n \sigma_{D_n}(f, \xi_i)$ se notează prin $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi se numeşte integrala definită Riemann a funcţiei f pe $[a,b]$.
O întrebare care se pune firesc este aceea a existenţei unei funcţii pentru care sunt definite integrala lui Newton ((N) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$) şi integrala lui Riemann ((R) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_n \sigma_{D_n}(f, \xi_i^n)$) şi cele două integrale definite sunt diferite.
Are loc următorul rezultat important.

Teoremă. Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, iar $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f pe $[a,b]$, atunci (N) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ (R) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, unde (N) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, (R) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sunt integralele definite în sensul lui Newton şi respectiv Riemann.

Demonstraţie. Fie $D_n = (x_0^{(n)}) = a, x_1^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)=b} \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ cu $\| D_n \| \xrightarrow{n} 0$. Avem

$$(\mathrm{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k_n-1} (\mathrm{N}) \int_{x_i^{(n)}}^{x_{i+1}^{(n)}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k_n-1} [F(x_{i+1}^{(n)}) - F(x_i^{(n)})]. \quad (1)$$

Se aplică teorema lui Lagrange pentru F pe $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ şi există $\xi_i^{(n)} \in \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ astfel încât $F(x_{i+1}^{(n)}) - F(x_i^{(n)}) = F'(\xi_i^{(n)})(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}) = = f(\xi_i^{(n)})(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)})$.

Deci (1) devine (N) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k_n-1} f(\xi_i^n)(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)})$.

Trecând aici la limită după $n \to \infty$ se deduce egalitatea

$$(\mathrm{N}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Deci dacă integralele lui Newton şi Riemann ale unei funcţii $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ există, atunci ele sunt egale. Se pot da exemple de funcţii pentru care una din integrale există, iar cealaltă nu există. Iată un astfel de exemplu. Fie $\operatorname{sgn} : [-1,1] \to \mathbb{R}$, o funcţie care este integrabilă Riemann (se va preciza că o funcţie mărginită ce are un număr finit de puncte de discontinuitate este integrabilă Riemann). Integrala $(\mathrm{N})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ nu există deoarece funcţia considerată nu admite primitive pe $[-1,1]$.

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **este continuă** atunci există $(\mathrm{N})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi $(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi mai mult, $(\mathrm{N})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Sume Darboux. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **o funcţie mărginită** şi $D = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_{[a,b]}$. Atunci există numerele $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$.

Numerele $s_D(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$, $S_D(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ se numesc **suma Darboux inferioară** şi respectiv **suma Darboux superioară** asociate funcţiei f şi diviziunii D. Se verifică uşor pentru aceste sume proprietăţile:

1) $s_D(f) \le \sigma_D(f, \xi_i) \le S_D(f)$, $\forall\, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$;
2) $\forall\, D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{[a,b]}$, $s_{D_1}(f) \le S_{D_2}(f)$.

Au sens numerele $\underline{I}(f) = \sup_D s_D(f)$, $\overline{I}(f) = \inf_D S_D(f)$, numite integrala Darboux inferioară şi respectiv **integrala Darboux superioară** a lui f, pentru care $s_D(f) \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le S_D(f)$.

Acum putem formula:

Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1) f este integrabilă Riemann.
2) Pentru orice $\epsilon > 0$, există $\delta(\epsilon) > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune $D \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ cu $\| D \| < \delta$ să avem $S_D(f) - s_D(f) < \epsilon$.

Utilizând integrabilitatea Riemann a unei funcţii $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se poate calcula limita unui şir (a_n) având termenul general a_n definit printr-o sumă $\sigma_{D_n}(f, \xi_k^n)$, unde f este continuă pe $[a,b]$ şi deci integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Probleme rezolvate

Să se calculeze limitele următoarelor şiruri, care au termenul general dat de

1) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$; 2) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}$; 3) $a_n = \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n} k^4$;

4) $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$; 5) $a_n = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$; 6) $a_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$;

7) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{9n^2}{9n^2+(3k-1)^2}$; 8) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{4n^2-k^2}}$;

9) $a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2-k^2}$; 10)* $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$;

11)* $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k\left(\frac{n+1}{n}\right)}$; 12)* $a_n = \sum_{k=1}^{n} k\left(\ln\frac{k+n}{n}\right)\sin^2\frac{k\pi}{n^2}$.

R. 1) Se scrie şirul sub forma: $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. Punând $\frac{k}{n} = x$ se ia funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ (sugerată de forma termenului general al sumei). Aceasta este o funcţie continuă pe $[0,1]$ şi deci integrabilă. Se consideră şirul de diviziuni echidistante ale intervalului $[0,1]$, $D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1\right)$ cu $||D_n|| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ şi punctele intermediare $\xi_1 = \frac{1}{n} \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ (pentru $k = 1$ în sumă avem $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$), $\xi_2 = \frac{2}{n} \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ (pentru $k = 2$ în sumă se obţine $\frac{1}{1+\frac{2}{n}}$),..., $\xi_n = 1 \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ (pentru $k = n$ în sumă rezultă $\frac{1}{1+\frac{n}{n}}$).

Atunci suma Riemann asociată lui f relativ la D_n şi sistemul de puncte intermediare este

$$a_n = \sigma_{D_n}(f, \xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \xrightarrow{n} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

Observaţie. Să remarcăm că *termenul general al sumei este valoarea*

funcţiei în punctul intermediar $\frac{k}{n}$; factorul $\frac{1}{n}$ care apare în faţa sumei este $(x_i - x_{i-1})$, acelaşi deoarece D_n este diviziune echidistantă. □

2) Punem $\frac{k}{n} = x$ şi se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, care este o funcţie continuă pe $[0,1]$ şi deci integrabilă aici. Prin urmare se pot alege convenabil $D_n \in \mathcal{D}_{[0,1]}$ cu $||D_n|| \xrightarrow{n} 0$ şi sistemul (ξ_k) de puncte intermediare. Ca la 1) se ia

$D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1\right) \in \mathcal{D}_{[0,1]}$, $||D_n|| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$, iar din termenul general al sumei se aleg punctele intermediare $\xi_1 = \frac{1}{n} \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\xi_2 = \frac{2}{n} \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \xi_n = 1 \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ (ξ_k este punctul din dreapta intervalului $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = \overline{1,n}$). Acum avem:

$$a_n = \sigma_{D_n}(f, \xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} \xrightarrow{n} \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e^x\Big|_0^1 = e - 1. \square$$

3) Se scrie termenul general astfel: $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4$. Se ia $\frac{k}{n} = x$ şi deci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$. Funcţia fiind continuă pe $[0,1]$ este integrabilă pe $[0,1]$ şi deci se pot alege $D_n \in \mathcal{D}_{[0,1]}$, $D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1\right)$ cu $||D_n|| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ precum şi $\xi_k = \frac{k}{n} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = \overline{1,n}$.

În acest caz $a_n = \sigma_{D_n}(f, \xi_k) \xrightarrow{n} \int_0^1 x^4 \mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$. □

4) Se scrie a_n sub forma: $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Se pune $\frac{k}{n} = x$ şi deci se ia funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, care este integrabilă pe $[0,1]$ (fiind continuă). Se aleg, ca mai sus, $D_n \in \mathcal{D}_{[0,1]}$, $D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1\right)$ cu $||D_n|| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ precum şi punctele intermediare $\xi_1 = 0 \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\xi_2 = \frac{1}{n} \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \xi_n = \frac{n-1}{n} \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ (ξ_k sunt extremităţile din stânga pentru fiecare interval).

Acum $a_n = \sigma_{D_n}(f, \xi_k) \xrightarrow{n} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. □

5) Se scrie a_n sub forma: $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2}$ şi se ia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Găsim că $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$. □

6) Se ia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ şi $\lim_n a_n = \int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$. □

7) Se aduce a_n la forma $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{3k-1}{3n}\right)^2}$. Se ia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $D_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1) \in \mathcal{D}_{[0,1]}$ cu $||D_n|| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$ şi se aleg $\xi_1 = \frac{2}{3n} \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, (pentru $k = 1$ în sumă), $\xi_2 = \frac{5}{3n} \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ (pentru $k = 2$ în sumă),..., $\xi_n = \frac{3n-1}{3n} \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ (pentru $k = n$ în sumă). Avem: $a_n = \sigma_{D_n}(f, \xi_k) \xrightarrow{n} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. □

8) Se aduce a_n la forma $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$ şi se ia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. Se obţine $\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$. □

9) Avem: $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Se ia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ şi $\lim_n a_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$. □

10)* Se prelucrează a_n astfel $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! n^n}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}} =$
$= \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n}\right)}$. De aici $\ln a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.
Se ia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$ şi $\lim_n \ln a_n = \int_0^1 \ln(1+x) \mathrm{d}x = \ln \frac{4}{e}$

sau $\ln(\lim\limits_n a_n) = \ln\frac{4}{e}$. De aici $\lim\limits_n a_n = \frac{4}{e}$. □

11)* Avem $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}}$ pentru care se ia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $D_n=\left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n}\right)$, $\xi_{k+1}=\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$, $k=\overline{0,n-1}$, când

$$\sigma_{D_n}(f,\xi_k)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}}\xrightarrow{n}\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2.\ \square$$

12)* Se traduce $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1$ în limbajul $\epsilon-\delta$. Pentru $\epsilon>0$, există $\delta(\epsilon)>0$ astfel încît $1-\epsilon<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<1+\epsilon$, $\forall\ x$ cu $|x|<\delta$, $x\neq 0$. Fie $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$ cu $\frac{\pi}{N(\epsilon)}<\delta(\epsilon)$. Dacă $n\geq N(\epsilon)$ avem $\frac{k\pi}{n^2}\leq\frac{\pi}{n}\leq\frac{\pi}{N(\epsilon)}<\delta(\epsilon)$. Deci $1-\epsilon<\frac{\sin^2\frac{k\pi}{n^2}}{\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^2}<1+\epsilon$, $\forall\ k=\overline{1,n}$ şi $\forall\ n\geq N(\epsilon)$. De aici se deduce

$$\frac{k^3\pi^2}{n^4}\left(\ln\frac{n+k}{n}\right)(1-\epsilon)<k\ln\frac{n+k}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n^2}<(1+\epsilon)\frac{k^3\pi^2}{n^4}\ln\frac{n+k}{n}$$ sau

$$1-\epsilon<\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\sin^2\frac{k\pi}{n^2}}{\frac{\pi^2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}\ln\frac{n+k}{n}}<1+\epsilon \text{ sau } \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k\ln\frac{n+k}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}\ln\frac{n+k}{n}=\pi^2\int_0^1 x^3\ln(1+x)dx=\frac{7\pi^2}{12}.\ \square$$

Probleme propuse

Să se calculeze limitele şirurilor:

1) $a_n=n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3n^2+k^2}$; 2) $a_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n+k}$; 3) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$;

4) $a_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}ke^{\frac{k^2}{n^2}}$; 5) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{5n+2k}}$;

6) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{(2n+k)\sqrt{k(2n+k)}}$; 7) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)\sqrt{n^2+k^2}}$;

8) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{n}$; 9) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$;

10)* $a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{1\le k<j\le n} \cos\frac{k}{n}\cdot\cos\frac{j}{n}$; 11)* $a_n = \left[\prod_{k=1}^{2^n-1}\left(1+\frac{k}{2^n}\right)\right]^{\frac{1}{2^n}}$;

12) $a_n = \frac{3}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3k}{n}}}$; 13) $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{n^4}}$;

14) $a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\sqrt[n]{n^2+k^2} - \ln\sqrt[n]{n^2}\right)$; 15) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}$;

16)* $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}}$; 17) $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{\sqrt{(2k-1)^2+4n^2}}$;

18)* $a_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}$; 19)* $a_n = \prod_{k=1}^{n}\sqrt[n+k]{1+\frac{k}{n}}$.

Integrala Riemann a funcţiilor mărginite cu un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa I *

Vom prezenta în continuare (fără demonstraţie) un rezultat pe care îl vom utiliza ulterior.

Teoremă. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$ şi $f(x) = g(x)$, $x \in [a,b] - A$, unde $A \subset [a,b]$ este **o mulţime finită**.

Atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Acest rezultat spune că dacă o funcţie f continuă pe $[a,b]$ se modifică într-un număr finit de puncte (mulţimea A), atunci funcţia obţinută g are aceeaşi integrală definităă pe $[a,b]$ ca şi funcţia f, adică

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

* Se adresează claselor cu o oră în plus la trunchiul comun.

Exemplu. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ şi $A=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n}\right\}$,

$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1]-A \\ 0, & x\in A. \end{cases}$ Să se arate că $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

R. Se consideră funcţia continuă $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$ pentru care $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Cum f diferă de g într-un număr finit de puncte se deduce că $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

Subiecte date la admitere în facultăţi

1. Fie P un polinom de gradul n cu rădăcinile $1,2,3,\ldots,n$ şi fie $I_n=\int_{n+1}^{n+2}\frac{P'(x)}{P(x)}\mathrm{d}x$. Care din următoarele afirmaţii este adevărat

a) $I=2n+3$; b) $I=\ln(n+1)$; c) $I=\ln\frac{n}{n+1}$; d) $e^{n+2}-e^{n+1}$; e) e^n-1.

(ADMITERE, UNIV. ROMÂNO-AMERICANĂ, BUCUREŞTI, 1997)

2. Să se calculeze în funcţie de $a\in\mathbb{R}$, $\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{|x-a|+1}$.

(ADMITERE, UNIV., ŞTIINŢE ECONOMICE, CLUJ-NAPOCA, 1997)

3. Fie $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$. Să se arate că funcţia este bijectivă. (ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, IAŞI, 1997).

4. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\int_1^n\frac{x+2}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$. Calculaţi $\lim_n a_n$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, PITEŞTI, 1997)

5. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+mx^2+nx+p$. Determinaţi parametrii reali m, n, p astfel încât f să aibă extreme în punctele -1 şi 1, iar $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=2$. (ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, PITEŞTI, 1997)

6. Valoarea $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{tg}t\mathrm{d}t}{x^2}$ este: a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$.

(ADMITERE, UNIV. INGINERI, SUCEAVA, 1997)

7. Să se calculeze: a) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$; b) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$

(ADMITERE, UNIV., ARAD, 1998)

8. Fie $I(a) = \int_0^a \frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)}$, $a > 0$. a) Calculaţi $I(a)$; b) Calculaţi $\lim_{a\to\infty} I(a)$; c) Studiaţi monotonia funcţiei $I : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, BAIA MARE, 1998)

9. Să se calculeze $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

(ADMITERE, UNIV. CHIMIE, BUCUREŞTI, 1998)

10. Să se calculeze $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$. a) $I = \text{arctg}2$; b) $I = 1$; c) $I = \ln 2$; d) $I = \text{arctg}e$; e) $I = \text{arctg}e - \frac{\pi}{4}$; f) $\frac{1}{2}\ln 2$.

(ADMITERE, UNIV., POLITEHNICĂ, BUCUREŞTI, 1998)

11. Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$, $I = \int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})}dt$, $g(t) = \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})}$ şi $G = g^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$. Atunci: 1. a) $I = \frac{(e-1)^2}{2}$; b) $I = \frac{e}{2}(e-1)$; c) $I = e^2 - 2e$; d) $I = \frac{e-1}{2e}$; l) $I = \frac{e^2-1}{2}$;
2. a) $G = 2^n e - \sqrt{e}$; b) $G = 2^n e^2 - e$; c) $G = 2^{n-1} - e$; d) $G = 2^n\sqrt{e}$; e) $G = 2^n - \sqrt{e}$.

(ADMITERE, A.S.E., MANAGEMENT, BUCUREŞTI, 1998)

12. Care este valoarea integralelor:

1) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$, a) $e+1+\ln\frac{e+1}{2}$; b) $e-1-\ln\frac{e+1}{2}$; c) $e+1+\ln\frac{e-1}{2}$; d) $1+\ln\frac{e+1}{2}$; e) $1-\ln\frac{e+1}{2}$;

2) $\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx$, a) $\frac{\pi}{2}$; b) $2-\frac{\pi}{2}$; c) 1; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{3}$.

(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ DE CONSTRUCŢII, BUCUREŞTI, 1998)

13. Să se calculeze $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, CRAIOVA, 1998)

14. Fie $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3|x-2|}{x-1}$.

a) Să se determine asimptotele funcţiei f;

b) Să se calculeze $\int_{\frac{3}{2}}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, IAŞI, 1998)

15. Să se calculeze $I_n = \int_0^n \frac{4x}{(x+1)(x^2+3)}\mathrm{d}x$ şi să se determine $\lim\limits_n I_n$.

(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ, IAŞI, 1998)

16. 1) Fie funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\left\{x, \frac{2}{x^2+1}\right\}$. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f. Calculaţi limita şirului (a_n), $a_n = \int_0^n f(x)\mathrm{d}x$, $n \geq 1$. 2) Fie integrala $I_n = \int_e^{e^n} \frac{(1+\ln t)\mathrm{d}t}{t(\ln t)(1+\ln^2 t)}$, $n \in \mathbb{N}$. Calculaţi I_n folosind schimbarea de variabilă $x = \ln t$ şi $\lim\limits_n I_n$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, PITEŞTI, 1998)

17. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$. Se cere să se determine: 1) asimptotele funcţiei; 2) valoarea integralei $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, SIBIU, 1998)

18. 1) Limita $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{-t^3}\mathrm{d}t}{\sin^3 x}$ este egală cu: a) 0; b) 1; c) $\frac{2}{3}$; d) e; e) ∞.

2) Integrala $I = \int_{-2}^{2} |x^2-1|\mathrm{d}x$ este: a) $I = 4$; b) $I = 0$; c) $I = 3$; d) $I = 1$; e) $I = -4$.

(ADMITERE, UNIV. MANAGEMENTUL FIRMEI, TG. MUREŞ, 1998)

19. Să se calculeze $I = \int_{-2}^{2} \min(x, x^2, x^3)\mathrm{d}x$. a) $I = 0$; b) $I = \frac{1}{2}$; c) $I = -\frac{1}{2}$; d) $I = -\frac{5}{2}$; e) $I = -\frac{3}{2}$. (ADMITERE, ECONOMIC, BRAŞOV,2002)

20. Se consideră funcţia $f : [0,\infty) \to R$ derivabilă şi care verifică relaţia $(x+1)f(x) = x^3 + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $\forall\, x \geq 0$. Dacă $f^{(n)}$ este derivata de ordinul n a funcţiei f şi $T = f^{(25)}_{(23)}$, atunci a) $T = \frac{1}{3}\cdot\frac{23!}{24^{25}}$; b) $T = \frac{1}{8\cdot 24^{22}}$, c) $T = -\left(\frac{11}{14}\right)^{21}\cdot\frac{6}{243}$; d) $T = \frac{1}{8}\cdot\frac{23!}{24^{23}}$; e) $T = -\frac{24!}{24^{24}}$.

(ADMITERE, A.S.E., CONTABILITATE, BUCUREŞTI, 2002)

21. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, care satisface relaţia $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Dacă $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$, atunci:

a) $I = -\frac{4}{9}$; b) $I = -\frac{4}{3}$; c) $I = -\frac{5}{9}$; d) $I = -\frac{7}{3}$; e) $I = \frac{2}{3}$.

(ADMITERE, A.S.E., COMERŢ, BUCUREŞTI, 2002)

22. Integrala $\int_0^2 \frac{(2-x)^{2n-1}}{(2+x)^{2n+1}}\mathrm{d}x$, $n \geq 1$ este:

a) $\frac{1}{8n}$; b) $\frac{1}{4n}$; c) $\frac{1}{2n}$; d) $\frac{3}{8n}$; e) alt răspuns.

(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ, CLUJ-NAPOCA, 2002)

Teste pentru pregătirea examenului de bacalaureat

Testul 1

I. 1. Se consideră dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}} + \frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine n astfel încât C_n^0, $\frac{1}{2}C_n^1$, $\frac{1}{4}C_n^2$ să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

b) Pentru $n = 8$, verificaţi dacă există valori ale lui x astfel încât diferenţa dintre termenii al şaselea şi al patrulea ai dezvoltării să fie 56.

2. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$;

b) $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{\sqrt{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$.

II. 1. a) Să se definească conceptul de grup abelian.

b) Fie $G = (0,1)$ şi legea „$*$“ definită astfel $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$, $\forall x, y \in G$. Arătaţi că $(G, *)$ este grup abelian izomorf cu $((0,\infty), \cdot)$ printr-un izomorfism de forma $f : G \to (0,\infty)$, $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

2. Să se determine parametrul real m astfel încât ecuaţia $x\ln x - m = 0$ să aibă soluţii reale.

3. Pentru $n \in \mathbb{N}$ se definesc funcţiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{e^{2^n}\cdot x}$ şi

$I_n = \int_0^{\frac{1}{2^n}} f_n(x)\mathrm{d}x$.

a) Să se calculeze I_0; b) Să se verifice relaţia $f_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. c) Să se arate că $I_{n+1} = \frac{1}{4} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Determinaţi termenul general al şirului $s_n = I_0 + I_1 + \ldots + I_n$ şi calculaţi limita sa.

III. 1. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(4,4)$. a) Să se arate că triunghiul ABC este isoscel. b) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC. c) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

2. Fie punctele $A(\lambda - 1, 0)$, $B(\lambda + 2, 0)$, $C(0, \lambda - 2)$, $D(0, \lambda + 1)$ în sistemul cartezian xOy. Să se determine locul geometric al intersecţiei dreptelor AD şşi BC când λ este parametru real.

3. Pentru ce valori ale lui a şi b planul $ax + by + 3z - 5 = 0$ este perpendicular pe dreapta $x = 3 + 2t$, $y = 5 - 3t$, $z = -2 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$?

IV. 1. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \int_0^t (1 + x)e^{2x}\mathrm{d}x$. a) Calculaţi $f(2)$; b) Să se calculeze $f'(t)$, $t > 0$; c) Să se calculeze $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^5}$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. a) Să se arate că există $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A = I_3 + B$. b) Să se calculeze B^n, $n \in \mathbb{N}^*$. c) Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. a) Să se calculeze f', f'' şi $f^{(n)}$, $n \geq 2$. b) Să se arate că $e^{3x} \geq x + 1$, $\forall x \geq 0$.

(Pentru profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie)

Testul 2

I. 1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{arctg}x - \ln(x^2 + 1)$.

a) Să se arate că derivata funcţiei f este o funcţie crescătoare.

b) Să se stabilească monotonia şi punctele de extrem ale funcţiei f. Rezolvaţi inecuaţia $f(x) > 0$.

2. a) Să se formuleze o condiţie necesară şi suficientă ca o funcţie să fie inversabilă.

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ -3x - 1, & x > 0 \end{cases}$. Să se arate că f este inversabilă, să se construiască f^{-1} şi să se rezolve ecuaţia $f(x) = f^{-1}(x)$.

3. Să se rezolve ecuaţia $C_{7x}^{x^2+10} + C_{5x+4}^{x^2+3x-4} = 3004$.

II. 1. Calculaţi integralele:

a) $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x,\ x>0$; b) $\int_0^2 (\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1})\mathrm{d}x$.

2. Se consideră mulţimea matricilor pătratice de ordinul trei peste $\mathbb{R}$ şi submulţimea $G = \left\{ A(x) |\ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x+2x^2 & 4x & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se arate că $A(x_1)A(x_2) = A(x_1+x_2),\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că G este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ faţă de operaţia de înmulţire a matricilor şi G, împreună cu operaţia indusă, formează o structură de grup comutativ.

III. 1. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(-1,3)$ şi dreapta d de ecuaţie $3x-y-2=0$. Să se determine ecuaţia cercului care are centrul pe dreapta d şi trece prin punctele A şi B.

2. Punctele $M(2,-1)$, $N(-1,4)$, $P(-2,2)$ sunt mijloacele laturilor unui triunghi. Să se determine vârfurile triunghiului.

3. Pentru ce valoare a lui c dreapta $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ este paralelă planului $2x-y+cz-2=0$?

IV. 1. Se consideră $f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$.

a) Să se determine D, domeniul maxim de definiţie al funcţiei, precum şi domeniul de continuitate, respectiv domeniul de derivabilitate.

b) Să se reprezinte grafic f (fără derivata de ordinul al doilea).

2. Calculaţi determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, scriind rezultatul ca produs de factori.

a) Să se demonstreze că dacă polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = aX^2+bX+c$ (a, b, c parametri), are trei rădăcini distincte, atunci $a=b=c=0$.

b) Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuaţia $(m^2-3m+2)x^2-(m^2-5m+4)x+m-m^2=0$ are cel puţin trei rădăcini distincte.

(Pentru profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie.)

Testul 3

I. 1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3^{-2x} - 2 \cdot 3^{-x}$.

a) Să se calculeze limitele funcţiei spre $+\infty$ şi $-\infty$.

b) Să se stabilească domeniul de derivabilitate şi să se calculeze derivata funcţiei f. Precizaţi monotonia şi punctele de extrem ale funcţiei f.
c) Să se determine punctele de inflexiune ale funcţiei f.

2. Se consideră ecuaţia cu coeficienţi reali $x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $z = 1 + 2i$ este o rădăcină a ecuaţiei, să se determine a, b şi să se rezolve ecuaţia.

3. Se consideră matricea $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 & 6 \\ 8 & 12 & 7 & m \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, m parametru real.

a) Să se determine rangul matricii A.

b) Pentru $m = 8$ să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 6x + 9y + 5z + 6t = 7 \\ 8x + 12y + 7z + mt = 9 \\ 2x + 3y + z + 2t = 3 \\ 4x + 6y + 3z + 4t = 5. \end{cases}$

II. 1. Într-un plan cu reper cartezian xOy se consideră dreptele d_m de ecuaţie $2x - my + m + 1 = 0$, m parametru real.

a) Să se arate că dreptele d_m trec prin punctul $A\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. b) Să se determine acele drepte d_m care sunt tangente la cercul de ecuaţie $4x^2 + 4y^2 - 1 = 0$. c) Să se determine aria triunghiului format de dreptele de ecuaţii $y = 0$, $2x = -1$ şi $6x + 8y - 5 = 0$.

2. În sistemul cartezian de coordonate se consideră punctul $M(2, 3)$ şi dreptele d_1, d_2 de ecuaţii $d_1 : x + y - 2 = 0$ şi $d_2 : 3x - 2y + 1 = 0$. Se notează cu A punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.
a) Să se determine coordonatele punctului A. Să se reprezinte grafic dreptele d_1 şi d_2. b) Să se scrie ecuaţia dreptei AM. c) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin A şi este paralelă cu prima bisectoare.

3. Se consideră în spaţiu vârfurile $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$, $C(4, -7, -2)$ ale unui triunghi. Calculaţi perimetrul triunghiului ABC.

III. 1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$, $x \neq -1$.
a) Să se calculeze $f'(x)$. b) Să se determine soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0$.
c) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei f. Să se stabilească punctele de extrem ale funcţiei f. d) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă $x_0 = 2$.

2. Fie polinoamele $f = X^5 - 1$, $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
a) Să se arate că g divide polinomul f. b) Dacă $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului g, atunci $x_k^5 = 1$, $\forall k = \overline{1,4}$. c) Să se calculeze $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ şi $T = x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 + x_4^7$.

IV. 1. Se consideră dezvoltarea $(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}})^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.
a) Să se determine n astfel încât suma coeficienţilor binomiali ai ultimilor trei termeni ai dezvoltării să fie egală cu 22. b) Pentru $n=6$, să se determine x ştiind că suma termenilor al treilea şi al cincilea este egală cu 135.

2. a) Fie funcţia $f:\mathbb{R}-\{-3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{(x+3)^2}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care tangenta la graficul funcţiei în punctul de abscisă 1 este paralelă cu axa Ox. Pentru $a=-3$ să se reprezinte grafic funcţia obţinută, folosind şi derivata a doua. b) Se consideră funcţia $f:\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3-2x}$. Să se determine numerele a,b,c astfel încât funcţia $F:\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$, să fie primitivă a funcţiei f. Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

3. Pe mulţimea $G=(-1,1)$ definim legea de compoziţie $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.
a) Arătaţi că $(G,*)$ este grup abelian. b) Fie funcţia $f:(-1,1)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$. Arătaţi că f este bijectivă. c) Verificaţi că $f(x*y)=f(x)f(y)$, $\forall x,y\in G$.
Demonstraţi utilizând metoda inducţiei matematice că
$$f(x_1*x_2*\ldots*x_n)=f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n),\ \forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in G.$$
e) Calculaţi $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{4}*\ldots*\dfrac{1}{2000}$.
(Pentru profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie)

2.2. Proprietăţile integralei definite

P1. (Proprietatea de linearitate).
Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcţii continue pe $[a,b]$ şi $\lambda\in\mathbb{R}$, atunci:
$$1)\ \int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$
$$2)\ \int_a^b\lambda f(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Dacă F, G sunt primitive pentru f şi respectiv g pe $[a,b]$, atunci $F+G$ este primitivă pentru $f+g$ pe $[a,b]$ şi deci conform

formulei Leibniz-Newton $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = (F+G)(x)\Big|_a^b = F(b)+$ $G(b)-F(a)-G(a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$ Analog se probează 2).

Observaţie. Concluziile 1), 2) din P1 se pot scrie sub o singură formă: Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $[a,b]$ şi $\lambda, |u \in \mathbb{R}$, atunci

$$\int_a^b (\lambda f + |ug) = \lambda \int_a^b f + |u \int_a^b g.$$

P2. (Proprietatea de aditivitate la interval).
Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă şi $c \in (a,b)$.

Atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

Exemplu. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} 1+e^x, & x \in [-1,0] \\ x+1, & x \in (0,1]. \end{cases}$

Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

R. Fie funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x+1$. Deoarece g este contin avem $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$. Cum $f(x) = g(x)$, $x \in (0,1]$, deduce $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$. Pe de altă parte f restricţionată la $[-1,0]$ fiind continuă şi $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = 2 - \frac{1}{e}$. Avem: $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x =$ $= \int_{-1}^0 (1+e^x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{d}x = (x+e^x)\Big|_{-1}^0 + \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{e} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{e}.$ □

Proprietăţile P3-P5 sunt facultative

P3. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă şi $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$.

Atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.$

În acest caz integrala definită este egală cu aria porţiunii cuprinsă în graficul lui f, axa Ox şi dreptele $x = a$, $x = b$.

Observaţii. 1) Dacă $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ **nu rezultă** $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. De exemplu $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$. Avem $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$, dar pe $[0,1]$ funcţia f este negativă !

2) Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \leq 0$, f continuă, atunci $\int_a^b f \leq 0$.

Corolar. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu proprietatea $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$. Atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Demonstraţie. Fie $h = g - f \geq 0$. Din P3 $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x \geq 0$ sau $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$, adică $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Observaţie. Acest corolar permite să **comparăm integralele definite** a două funcţii definite pe $[a,b]$, **fără a le calcula efectiv!** Această proprietate este cunoscută sub denumirea de proprietatea de **monotonie** a integralei.

Exemple. 1. Să se demonstreze inegalităţile:

a) $\int_1^2 \ln(1+x)\mathrm{d}x < \int_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$; b) $\int_0^1 e^x\mathrm{d}x \leq \int_0^1 (1+x)^{1+x}\mathrm{d}x$.

R. a) Vom demonstra că $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$, $\forall\, x \in [1,2]$. Fie funcţia $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ cu $f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - 2 - x}{2\sqrt{1+x}(1+x)} < 0$ dacă $x \in [1,2]$. Deci f este strict descrescătoare pe $[1,2]$. Din $(0 <)\ 1 < x$ rezultă $(f(0) = 0 >)\ f(1) > f(x)$, adică $f(x) < 0$, care este tocmai inegalitatea propusă la început. În această inegalitate integrăm pe $[1,2]$ şi obţinem inegalitatea ce trebuia demonstrată. □

b) Va trebui să arătăm că $e^x \leq (1+x)^{1+x}$, $x \in [0,1]$, ceea ce-i echivalent cu $x \leq (1+x)\ln(1+x)$, $x \in [0,1]$, $(*)$. Se consideră $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$ pentru care $f'(x) = -\ln(1+x) \leq 0$, $x \in [0,1]$. Deci f este descrescătoare pe $[0,1]$, iar din $0 \leq x \leq 1$ rezultă $f(0) \geq f(x)$, adică $0 \geq f(x)$, care reprezintă inegalitatea $(*)$. Inegalitatea $e^x \leq (1+x)^{1+x}$ se integrează pe $[0,1]$ şi rezultă cea propusă spre demonstrat. □

2. Să se determine toate funcţiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue şi descrescătoare astfel încât $\int_0^1 f(x^2-x+1)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x+1$.

R. Evident $x^2-x+1\geq x$, iar din f descrescătoare rezultă $f(x^2-x+1)\leq f(x)$, $x\in[0,1]$ şi deci $\int_0^1 f(x^2-x+1)\mathrm{d}x\leq\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Egalitatea din enunţ, via această inegalitate, conduce la $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x+1=\int_0^1 f(x^2-x+1)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ sau $\int_0^1[f(x)-1]^2\mathrm{d}x\leq 0$. Cum $\int_0^1[f(x)-1]^2\mathrm{d}x\geq 0$, găsim $\int_0^1[f(x)-1]^2\mathrm{d}x=0$ şi deci $f(x)=1$, $\forall\, x\in[0,1]$.

P4. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă şi dacă $m\leq f(x)\leq M$, $\forall\, x\in[a,b]$, atunci

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a).$$

Demonstraţie. Se integrează pe $[a,b]$ inegalitatea din ipoteză.

Exemple. Să se demonstreze inegalităţile:

1) $\frac{2}{e}\leq\int_{-1}^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\leq 2$; 2) $\sqrt{2}\leq\frac{1}{2}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+4x+5}\mathrm{d}x\leq\sqrt{10}$.

R. 1) Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$. Realizând tabelul de variaţie pentru această funcţie se constată că $f(x)\in[\frac{1}{e},1]$, adică $\frac{1}{e}\leq f(x)\leq 1$, $\forall\, x\in[-1,1]$. De aici prin integrare pe $[-1,1]$, rezultă inegalitatea dorită. □

2) Funcţia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ are $f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}>0$, $x\in[-1,1]$ şi deci f este o funcţie strict crescătoare. Avem pentru $-1\leq x\leq 1$, $f(-1)\leq f(x)\leq f(1)$, adică $\sqrt{2}\leq f(x)\leq\sqrt{10}$. Integrând această inegalitate pe $[-1,1]$ rezultă inegalitatea propusă spre demonstrat. □

P5. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci $|f|$ este continuă şi mai mult $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

Demonstraţie. Din f continuă rezultă $|f|$ continuă. Au loc inegalităţile $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $\forall\, x \in [a,b]$, care prin integrare pe $[a,b]$ dau $-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$, adică $|\int f| \leq \int |f|$.

Observaţie. Inegalitatea din P5 se poate enunţa astfel: modulul integralei este mai mic decât integrala modulului.

Aplicaţie. Să se arate că dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este derivabilă, cu f' continuă atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x = f(0)$.

R. Din lanţul de inegalităţi, via criteriul majorării şi teorema lui Lagrange,

$$\left|\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x - f(0)\right| = \left|\int_0^1 [f(x^n) - f(0)]\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 x^n |f'(c_n)|\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|, \text{ unde } c_n \in (0, x^n),$$

se deduce limita cerută.

Corolar 1. Dacă $f : [a,b] \to [0,\infty)$ este continuă pe $[a,b]$, atunci oricare ar fi intervalul $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ are loc inegalitatea

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Avem:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x,$$

deoarece prima şi a treia integrală din sumă sunt numere pozitive (P3)

Corolar 2. Dacă $f : [a,b] \to [0,\infty)$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi dacă există $x_0 \in [a,b]$ cu $f(x_0) > 0$, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

Demonstraţie. Cum f este continuă în x_0 şi $f(x_0) > 0$, atunci se ştie că există o vecinătate a lui x_0 în care f este strict pozitivă. Fie $[\alpha,\beta]$ inclus în această vecinătate.

Deci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x.$

Prima şi a treia integrală reprezintă numere pozitive. Integrala din mijloc este un număr **strict pozitiv**.

Observaţie. Dacă $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă cu proprietatea $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$, $\forall [a,b] \subset [0,\infty)$, atunci $f \geq 0$.

Definiţie. Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci prin definiţie: $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Probleme rezolvate

1) Să se calculeze integralele definite:

a) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x^2+1, & x \in (1,2] \end{cases}$;

b) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right)$;

c) $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(3x, x^2+2)$;

d) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [2^2 x]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a;

e) $f : [0, 2\sqrt{3}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$.

R. a) Fie funcţiile $g_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_2 : [1,2] \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2+1$. Cum acestea sunt funcţii continue rezultă că sunt integrabile. Să observăm că f restricţionată la $[0,1]$ coincide cu g_1. Avem: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g_1(x)\mathrm{d}x$. Funcţia f restricţionată la $[1,2]$ diferă de g_2 în $x = 1$. Deci $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 g_2(x)\mathrm{d}x$.

Acum $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2+1)\mathrm{d}x =$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^2 = \frac{23}{6}$. □

b) Pentru a explicita minimul se consideră $g : [0,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{2}{x^2+1} - x$. Avem $g(1) = 0$ şi $g'(x) < 0$, ceea ce arată că g este strict descrescătoare pe $[0,2]$.
Deci dacă $0 \le x \le 1$, atunci $g(0) \ge g(x) \ge g(1) = 0$, adică $f(x) = x$, iar dacă $1 \le x \le 2$, atunci $g(1) = 0 \ge g(x) \ge g(2)$, adică $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

Prin urmare $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ \dfrac{2}{1+x^2}, & x \in (1,2]. \end{cases}$

Observaţie. Funcţia f se poate explicita sub forma

$f(x) = \begin{cases} x, & x \le \dfrac{2}{1+x^2} \\ \dfrac{2}{1+x^2}, & x > \dfrac{2}{1+x^2} \end{cases}$ şi se rezolvă inecuaţiile în $[0,2]$.

Fie $h : [1,2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$. Cum f restricţionată la $[1,2]$ diferă de h într-un punct ($x = 1$), rezultă că $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 h(x)\mathrm{d}x$. Avem:

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2\mathrm{arctg}x\Big|_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2} + 2\mathrm{arctg}2 - \frac{\pi}{2}. \square$$

c) Avem $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \in [0,1] \cup [2,3] \\ 3x, & x \in (1,2). \end{cases}$ Ca mai sus avem:

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+2)\mathrm{d}x + \int_1^2 3x\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2+2)\mathrm{d}x = \frac{91}{6}. \square$$

d) Se explicitează funcţia şi se obţine:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le 4x < 1, \quad 0 \le x < \dfrac{1}{4} \\ 1, & 1 \le 4x < 2, \quad \dfrac{1}{4} \le x < \dfrac{2}{4} \\ 2, & 2 \le 4x < 3, \quad \dfrac{2}{4} \le x < \dfrac{3}{4} \\ 3, & 3 \le 4x < 4, \quad \dfrac{3}{4} \le x < \dfrac{4}{4} \\ 4, & x = 1 \end{cases}$$

Fie funcţiile $g_1 : \left[0, \dfrac{1}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = 0$, $g_2 : \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = 1$,

$g_3 : \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $g_3(x) = 2$, $g_4 : \left[\frac{3}{4}, 1\right] \to \mathbb{R}$, $g_4(x) = 3$. Aceste funcţii fiind constante sunt continue pe domeniile de definiţie. Pe de altă parte f restricţionată la intervalele $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$, $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$, $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ coincide cu g_1, g_2, g_3 şi respectiv g_4 în toate punctele cu excepţia unui punct din fiecare interval. Deci

$$\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}} g_1(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} g_2(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} g_3(x)\mathrm{d}x, \quad \int_{\frac{3}{4}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{3}{4}}^{1} g_4(x)\mathrm{d}x.$$

Acum $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}} 0\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} 1\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} 2\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{4}}^{1} 3\mathrm{d}x =$

$= x\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} + 2x\Big|_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} + 3x\Big|_{\frac{3}{4}}^{1} = \frac{3}{2}$. □

e) Explicitând funcţia avem $(3 < 2\sqrt{3} < 4)$: $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ x-1, & x \in [1,2) \\ x-2, & x \in [2,3) \\ x-3, & x \in [3, 2\sqrt{3}]. \end{cases}$

Cu un raţionament asemănător celor de mai sus se deduce că

$$\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x + \int_2^3 (x-2)\mathrm{d}x + \int_3^{2\sqrt{3}} (x-3)\mathrm{d}x =$$

$= 6(2-\sqrt{3})$. □

2) Fără a calcula integralele să se arate că

$$\int_0^e \ln(1+x)\mathrm{d}x \geq \int_0^e \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x.$$

R. Vom arăta că $\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$, $x \in [0,e]$ şi apoi prin integrarea acestei inegalităţi rezultă relaţia dorită.

Fie $f : [0,e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ pentru care $f'(x) =$

$= \frac{x}{(x+1)^2} > 0$, adică f este strict crescătoare pe $[0,e]$. Din $0 \leq x \leq e$ rezultă $0 = f(0) \leq f(x) \leq f(e)$. Reţinem $f(x) \geq 0$ pentru $x \in [0,e]$. □

3) Să se demonstreze inegalităţile:

a) $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{2x}{1+x^{13}}\mathrm{d}x < 1$; b) $\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6}$;

c)* $\frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x < \frac{\pi}{4}$; d)* $\frac{4}{3} < \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x < \frac{e+2}{3}$.

R. a) Inegalitatea $\frac{2x}{1+x^2} < \frac{2x}{1+x^{13}} < 2x$, $x \in (0,1)$ se integrează pe $[0,1]$. □

b) Se integrează pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ inegalitatea $1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.□

c)* Se ştie că $e^u > 1+u$, $u \neq 0$. Dė aici $e^{-x^2} > 1-x^2$, $e^{x^2} > 1+x^2$. Deci $1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$, $x > 0$, care se integrează pe $[0,1]$;□

d)* $x^2+1 \leq e^{x^2} \leq (e-1)x^2+1$, $x \in [0,1]$. □

4) Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1) \int_0^1 [nx]e^x\mathrm{d}x = 1$.

R. a) Au loc inegalităţile: $0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$, $n \leq x \leq n+1$, care prin integrare dau $0 < \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$. Trecând, aici, la limită după n rezultă afirmaţia dorită. □

b) Se scrie limita sub forma: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \int_0^1 [nx]e^x\mathrm{d}x$, (1).

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$, (2); $e^x(nx-1) < [nx]e^x \leq nxe^x$ şi deci

$\int_0^1 (nx-1)e^x\mathrm{d}x \leq \int_0^1 [nx]e^x\mathrm{d}x \leq \int_0^1 nxe^x\mathrm{d}x$ sau $n+1-e \leq \int_0^1 [nx]e^x\mathrm{d}x \leq$

$\leq n$ şi deci $\frac{n+1-e}{n} \leq \frac{1}{n}\int_0^1 [nx]e^x\mathrm{d}x \leq 1$, care prin trecere la limită, via criteriul „cleştelui“, dă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 [nx]e^x\mathrm{d}x = 1$, (3). În (1) scriind limita ca produs şi ţinând seama de (2) şi (3) rezultă afirmaţia. □

5) Să se studieze convergenţa şirului (a_n) dat de termenul general

$a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

R. Dacă $x \in [0,1]$, atunci $x^n\sqrt{1-x} \geq 0$ şi deci $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Se integrează prin părţi ($f(x) = x^n$, $g'(x) = \sqrt{1-x}$) şi se obţine:

$$\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}(1-x)\mathrm{d}x = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\mathrm{d}x -$$

$$-\frac{2n}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\mathrm{d}x, \text{ adică } a_n = \frac{2n}{3}a_{n-1} - \frac{2n}{3}a_n \text{ sau } a_n = \frac{2n}{2n+3}a_{n-1}.$$

Din această relaţie rezultă $a_n \leq a_{n-1}$, $\forall\, n \geq 1$, adică (a_n) este un şir descrescător. Cum el este şi mărginit inferior se deduce că este convergent, iar din $0 \leq a_n \leq \int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n \to 0$. □

Observaţie. Pentru monotonia şirului se face diferenţa $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}(x-1)\mathrm{d}x$. Cum $x - 1 \leq 0$ şi $x^n\sqrt{1-x} \geq 0$ pentru $x \in [0,1]$ rezultă $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

6)* Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sqrt{2(\sqrt{2}-1)} < \int_0^1 \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}}\mathrm{d}x < \frac{24+5\pi}{40}.$$

R. Se aplică inegalitatea între media geometrică şi cea aritmetică şi rezultă $\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}} = \sqrt{(x^4+1)\frac{1}{x^2+1}} < \frac{x^4+1+\frac{1}{x^2+1}}{2}$, $x \in (0,1)$.

De aici prin integrare avem:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}}\mathrm{d}x < \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^4+1+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{24+5\pi}{40}.$$

Pe de altă parte $\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}} \geq \sqrt{\sqrt{2}-1}$ dă $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}}\mathrm{d}x \geq \sqrt{\sqrt{2}-1}$. □

Observaţie. Pentru inegalităţi stricte a se vedea Corolar 2 de la P6.

7)* Calculând în două moduri $\int_0^1 (x+1)^n\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$ să se demonstreze egalitatea: $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.

R. Avem: $$\int_0^1 (x+1)^n\mathrm{d}x = \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}, \qquad (1)$$

şi respectiv

$$\int_0^1 (x+1)^n \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 C_n^k x^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k, \quad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă egalitatea. □

8)* Fie $f : [0,1] \to [1,2]$ o funcţie continuă cu proprietatea $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq 1$. Să se arate că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leq 1$.

R. Cum $1 \leq f(x) \leq 2$, $x \in [0,1]$ rezultă $[f(x)-1][f(x)-2] \leq 0$ iar de aici $\frac{[f(x)-1][f(x)-2]}{f(x)} = f(x) - 3 + \frac{2}{f(x)} \leq 0$, $x \in [0,1]$. De aici prin integrare $2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leq 3 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq 3 - 1 = 2$. □

9) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Dacă

a) $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$ şi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$

sau

b) $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$, $\forall\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă, atunci $f(x) = 0$, $\forall\, x \in [a,b]$.

R. a) Raţionăm prin reducere la absurd. Presupunem că există $x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_0) \neq 0$, adică $f(x_0) > 0$. Cum f este continuă în x_0, atunci există $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $f(x) > 0$, $\forall\, x \in V$. Fie $\varepsilon > 0$ astfel ca $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset V$.

Atunci (Corolar 2, P6) avem: $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x > 0$.

Conform corolarului 1 de la proprietatea P6 avem:

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x > 0$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza.

Aşadar $f(x) = 0$, $\forall\, x \in [a,b]$. □

b) Se pune $g = f$ şi se aplică a).

10)* Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu f' continuă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1)$.

R. Se aplică integrarea prin părţi şi rezultă

$$n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\mathrm{d}x.$$

Dar $0 \le \left|\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 x^n |f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{1}{n+1} \sup_{x\in[0,1]} f(x)$ şi deci

$\lim_n \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$. Analog $\lim_n \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\mathrm{d}x = 0.\square$

Probleme propuse

1) Să se calculeze integralele definite:

a) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in [0,1] \\ 1 + \sqrt{x}, & x \in (1,2] \end{cases}$;

b) $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} [x], & x \in [2,4] \\ [x^2], & x \in [0,2) \end{cases}$;

c) $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min(x^2 - 1, x + 1)$;

d) $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(x^2 - x + 4, 5x - 1)$;

e) $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$;

f) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\left(\frac{1}{3^x}, 3^x\right)$;

g) $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(x^2, 2^x)$.

2) Să se calculeze:

a) $\int_0^2 e^x \max(1, x^2)dx$; b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \max(\mathrm{tg}x, \mathrm{tg}^3 x)dx$;

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \max(\sin x, \sin^3 x)\sin x dx$.

3) Să se demonstreze inegalităţile:

a)* $1 - e^{-\frac{\pi}{2}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}dx < \frac{\pi}{2}(1 - e^{-1})$;

b) $a < \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} < \arcsin a$, $(\forall)\, a \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c)* $\frac{\pi}{6} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} \le \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

4) Fără a calcula efectiv integralele, să se demonstreze inegalităţile:

a) $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \leq \ln 2$; b) $0 \leq \int_0^1 \ln\frac{e^x+1}{2}dx \leq \ln\frac{e+1}{2}$;

c) $-\frac{35}{6} \leq \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{3}{2}} \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}dx \leq -\frac{17+12\sqrt{2}}{6}$;

d) $1 < \frac{1}{e^2(e-1)}\int_e^{e^2} \frac{x}{\ln x}dx < \frac{e}{2}$;

e) $\sqrt{3} \leq \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \leq \sqrt{6}$; f) $\ln\frac{3}{4} \leq \int_0^1 \ln(x^2-x+1)dx \leq 0$;

g) $0 < \int_{-\frac{1}{2}}^0 x\ln(1-x^2)dx < \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$; h) $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leq 2e^2$.

5) Fără a calcula efectiv integralele să se arate că:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\int_1^2 (e+x)^{e-x}dx > \int_1^2 (e-x)^{e+x}dx$;

c) $\int_9^{10} x^{\sqrt{x+1}}dx > \int_9^{10} (x+1)^{\sqrt{x}}dx$; d) $\int_1^2 \ln(1+x^2)dx < \int_1^2 x\,\mathrm{arctg}\,x dx$.

6) Inegalităţi remarcabile **(facultativ)**

1. (Inegalitatea lui **Young**) Fie $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie continuă, strict crescătoare, astfel încât $f(0) = 0$. Atunci $\forall a \geq 0$ şi $b \in f(\mathbb{R}_+)$ avem:

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy.$$

R. Dacă S_1 este porţiunea din plan cuprinsă între G_f, axa Ox şi dreapta $x = a$, iar S_2 reprezintă mulţimea din plan cuprinsă între $G_{f^{-1}}$, axa Oy şi dreapta $y = b$, atunci se constată că avem: $ab \leq$ aria (S_1) + aria (S_2), unde aria $(S_1) = \int_0^a f(x)dx$, aria $(S_2) = \int_0^b f^{-1}(y)dy$. ■

Aplicaţii. 1) Să se arate că $\int_0^e (\sqrt{e^x-1} + \ln(x^2+1))dx \geq e^2$.

R. Se consideră $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \ln(x^2+1)$, care este continuă, strict crescătoare (compunere de funcţii strict crescătoare) şi $f(0) = 0$. Inversa ei este $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x-1}$. Se aplică inegalitatea lui Young pentru $a = b = e$.□

2) Fie $f:[0,2]\to[0,2]$, $f(0)=0$, continuă, bijectivă şi $f(f(x))\geq x$, $\forall x\in[0,2]$. Să se arate că $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\geq 2$.

R. Funcţia f este strict crescătoare (f fiind continuă, injectivă şi $f(0)=0$). Deci $f(2)=2$. Din $f(f(x))\geq x$ rezultă $f(x)\geq f^{-1}(x)$. Acum $2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f^{-1}(x)\mathrm{d}x\geq 4$. □

2. (Inegalitatea **Cauchy - Buniakovski - Schwartz**)

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcţii continue, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leq\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Avem **egalitate** în inegalitate dacă $g=0$ şi f arbitrară sau dacă $f=kg$, $k\in\mathbb{R}$. (Inegalitatea Cauchy (1823), Buniakovski (1859), Schwartz (1885))

R. Din $0\leq\int_a^b(f(t)-xg(t))^2\mathrm{d}t=\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t-2x\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t+$

$+x^2\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t$, $\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă $\Delta_x\leq 0$.■

Aplicaţii. 1) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă. Să se arate că

$$\left(\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x\right)^2\leq(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

R. Se aplică inegalitatea pentru fiecare din integralele membrului stâng.

2) Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă astfel încât $f(1)-f(0)=a$. Să se arate că $\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x\geq a^2$.

R. Se aplică inegalitatea pentru $\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x=$

$=\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 1^2\mathrm{d}x\geq\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(f(x)\Big|_0^1\right)^2=a^2$. □

3) Să se determine funcţiile continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ astfel încât:

1) $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=2$; 2) $\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x=4$.

R. Avem succesiv

$$2^4 = \left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^4 = \left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2 \cdot \left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\right) = \left(\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\right)^2 = 4^2,$$ cu egalitate în inegalitate dacă f este constantă, $f(x)=k$. Din 1), $k^2=2$ dă $|k|=\sqrt{2}$. □

4) Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că:

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

R. Se aplică inegalitatea şi avem: $\left(\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 =$

$$= \left(\int_0^1 x \cdot (xf(x))\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 x^2 f^2(x)\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Avem egalitate în inegalitate dacă $xf(x) = kx$, $\forall x \in [0,1]$. Deci $f(x) = k$, $x \neq 0$ şi din f continuă rezultă $f(x) = k$, $\forall x \in [0,1]$. □

3. (Inegalitatea lui **Jensen**) Fie $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii continue.

a) Dacă g este **convexă**, atunci

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\mathrm{d}x;$$

b) Dacă g este **concavă**, atunci

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\mathrm{d}x,$$

$\forall a, b \in I$, $a < b$.

Egalitatea are loc dacă f este constantă.

4. (Inegalitatea lui **Cebîşev**) Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue şi monotone. Dacă:

a) f, g **au aceeaşi monotonie**, atunci

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right) \leq (b-a)\int_a^b (f\cdot g)(x)\mathrm{d}x.$$

b) f, g **au monotonii diferite**, atunci

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right) \geq (b-a)\int_a^b (f\cdot g)(x)\mathrm{d}x.$$

Egalitatea are loc dacă **una** din funcţiile f, g este **constantă** (cu excepţia, eventual, a unei mulţimi numărabile).

R. Să observăm (pentru cazul a)) că (f ... aceeaşi monotonie)
$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geq 0,\ \forall x,y\in[a,b]$ sau
$f(x)g(x)-f(x)g(y)-f(y)f(x)+f(y)g(y)\geq 0.$
Se integrează această inegalitate pe $[a,b]$, după x şi se obţine:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-g(y)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(y)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x+$$
$$+(b-a)f(y)g(y)\geq 0,\ \forall y\in[a,b].$$

Acum se integrează inegalitatea obţinută pe $[a,b]$, după y şi rezultă

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\left(\int_a^b g(y)dy\right)\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)-$$
$$-\left(\int_a^b f(y)dy\right)\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)dy\geq 0,$$

iar de aici se deduce inegalitatea propusă (Se are în vedere că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)dy$ – nu contează litera cu care se notează variabila de integrare).■

Aplicaţii. 1) Se consideră $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă, crescătoare. Să se arate că $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, cu egalitate dacă $a=b$ sau f este constantă.

R. Cum $g:[a,b]\to\mathbb{R},\ g(x)=x$ este de asemenea crescătoare, se aplică inegalitatea lui Cebîşev pentru acest caz şi obţinem:

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geq\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b x\mathrm{d}x\right)=\frac{b+a}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\square$$

2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi monotonă. Să se arate că $\forall a>0$,

$$\int_{-a}^a xf\left(f(x)\right)\mathrm{d}x\geq 0.$$

R. Din f monotonă, rezultă $f\circ f$ este crescătoare. Cum şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x$ este crescătoare se aplică Cebîşev. □

3) Fie $f:[a,b]\to[0,\infty)$, $a>0$ o funcţie derivabilă cu derivata negativă. Să se arate că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{b+a}{2}\int_a^b\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$

R. Din $(\frac{f(x)}{x})'\leq 0$ se deduce că $x\to\frac{f(x)}{x}$ este descrescătoare. Utilizând Cebîşev avem: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\frac{f(x)}{x}\right]\cdot x\mathrm{d}x\leq$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{b+a}{2}\int_a^b \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x. \square$$

7) Să se studieze convergenţa şirurilor definite prin termenul general:

a) $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x$; b)* $I_n = \int_{\frac{1}{e^n}}^1 [\ln x]\mathrm{d}x$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a;

c) $I_n = \int_1^e \ln^n x\mathrm{d}x$; d) $I_n = \int_0^n \frac{x^3\mathrm{d}x}{x^8+2x^4+2}$; e) $I_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$;

f) $I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^n}}$; g) $I_n = \int_0^n \ln(1+e^{-x})\mathrm{d}x$, $n \geq 1$.

8) a) Să se determine o relaţie de recurenţă pentru $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Să se calculeze suma

$$S_n = C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}C_n^n.$$

9) Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă cu proprietatea că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \in \{(b-a)f(a),\ (b-a)f(b)\}$, să se arate că f nu este injectivă.

10)* Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$. Să se arate că $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leq -mM(b-a)$, unde $m = \min_{a\leq x\leq b} f(x)$, $M = \max_{a\leq x\leq b} f(x)$.

11) Să se arate că $\int_0^1 [2^n x]\mathrm{d}x = \frac{2^n-1}{2}$ şi apoi să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 [2^n x]\mathrm{d}x}{\int_0^1 [3^n x]\mathrm{d}x}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

12) Să se determine $f \in \mathbb{Q}[X]$ polinom de grad minim cu proprietatea $\int_1^{n^3} [\sqrt[3]{x}]\mathrm{d}x = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $[a]$ = partea întreagă a lui a.

13) Calculând în două moduri integrala

$\int_0^1 x(1+x)^n \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$ să se arate că $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+2} = \frac{n \cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$

Subiecte date la admitere în facultăţi

1. Să se calculeze integrala $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIV., ŞTIINŢE ECONOMICE, ALBA IULIA, 1997)

2. Fie integrala $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculaţi I_0, I_1, I_2; b) Stabiliţi o relaţie de recurenţă între I_n şi I_{n-2};
c) Calculaţi I_{2m+1}, $m \in \mathbb{N}$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, BAIA MARE, 1997)

3. Să se calculeze $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^3 - 2x + 1 + \sin x}{x^2+1} \mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, BRAŞOV, 1997)

4. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+1}, & x \in [-1,0] \\ x, & x \in (0,1]. \end{cases}$

a) Să se arate că f este continuă; b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$;
c) Să se arate că $e^x \geq x+1$, $\forall x \geq 0$ şi apoi să se demonstreze inegalitatea $\int_0^1 e^{x^2} \mathrm{d}x \geq \frac{4}{3}$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, BUCUREŞTI, 1997)

5. Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$, n fixat şi $I_k = \int_1^n |x-k| \mathrm{d}x$, $k = \overline{1,n}$. Se defineşte şirul $a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} I_k$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Atunci:

1) a) $I_k = 2k^2 + n^2$; b) $I_k = \frac{k^2+n^2}{6}$; c) $I_k = \frac{k^2+(n+k)^2}{2}$;
d) $I_k = k^2 + n^2 - nk$; e) $I_k = \frac{(k-1)^2+(n-k)^2}{2}$.
2) a) $L = \frac{1}{3}$; b) $L = \frac{2}{3}$; c) $L = \frac{1}{6}$; d) $L = 0$; e) $L = 1$.

(ADMITERE, A.S.E., COMERŢ, BUCUREŞTI, 1997)

6. Fie şirul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$. a) Calculaţi I_1;
b) Să se arate că şirul este monoton descrescător şi mărginit.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, BRAŞOV, 1999)

7. Valoarea integralei $\int_{-2}^{2}(|x-1|+|x+1|)\mathrm{d}x$ este:

a) 6; b) 8; c) 10; d) 12; e) 14.

(ADMITERE, UNIV., R.E.I., CONSTANŢA, 1999)

8. 1) Limita $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^n \frac{x-1}{x+1}\mathrm{d}x$ este: a) 0; b) 1; c) 2; d) e; e) ∞.

2) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{arctg} t\mathrm{d}t}{x^2}$. a) $\frac{1}{2}$; b) 0; c) -1; d) $-\frac{1}{2}$.

(ADMITERE, UNIV. ELECTROTEHNICĂ, BRAŞOV, 2000)

9. Să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^2 \frac{|x-n|}{x+n}\mathrm{d}x$.

a) Limita nu există; b) $L=\infty$; c) $L=1$; d) $L=-3$; e) $L=0$; f) $L=2$.

(ADMITERE, UNIV. POLITEHNICĂ, BUCUREŞTI, 2000)

10. Fie $I_n=\int_{n-1}^{n}\frac{x+4}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt{n}+3)I_n$ şi $\beta=\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-x^2+1}-2x)$, atunci:

1) a) $\alpha=0$; b) $\alpha=\frac{1}{e}$; c) $\alpha=1$; d) $\alpha=\sqrt{e}$; e) $\alpha=e$.

2) a) $\beta=3$; b) $\beta=\frac{2}{9}$; c) $\beta=\frac{3}{2}$; d) $\beta=-\frac{2}{9}$; e) $\beta=-\frac{2}{3}$.

(ADMITERE, A.S.E., R.E.I., BUCUREŞTI, 2000)

11. Dacă $I_n=\int_0^1 \mathrm{e}^x[nx]\mathrm{d}x$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a şi $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1\right)I_n$, atunci:

a) $L=\ln 2$; b) $L=0$; c) $L=\frac{1}{\mathrm{e}}$; d) $L=\mathrm{e}$; e) $L=1$.

(ADMITERE, A.S.E., R.E.I., BUCUREŞTI, 2002)

Teste pentru pregătirea examenului de bacalaureat

Testul 1

I. 1. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}\cdot\log_5 x$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei.

a) Să se determine D. b) Să se rezolve ecuaţia $f(x)=3$.

c) Să se rezolve inecuaţia $f(x)\geq 3$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} - \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

a) Să se determine numerele reale a, b, c pentru care

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \searrow 2} f(x)$. c) Calculaţi $\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{9}{5}} f(x)\mathrm{d}x$.

d) Să se arate că oricare ar fi numărul real $a \neq 0$, ecuaţia $f(x) = a$ are trei rădăcini reale şi distincte.

II. 1. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - 1\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(e^x+3)^3 - e^{3x}}{xe^{2x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$.

2. Să se calculeze integralele:

a) $\int \frac{(1+x)\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$, $x \geq 0$; b) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $\int_{-2}^{2} \min(1, x, x^2)\mathrm{d}x$; d) $\int_0^4 \frac{|x-1|\mathrm{d}x}{|x-2|+|x-3|}$.

III. 1. Se consideră cercurile $\mathcal{C}_1 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$,
$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 = 4$.

a) Să se determine punctele A şi B de intersecţie ale cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.

b) Să se arate că dreapta AB este perpendiculară pe prima bisectoare.

c) Dacă $\{C\} = AB \cap Ox$, să se determine $M \in \mathcal{C}_2$ astfel încât lungimea segmentului $[MC]$ să fie maximă.

2. a) Să se afle poziţia celui de-al treilea vârf al triunghiului echilateral ale cărui două vârfuri au afixele $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$.

b) Se consideră trei vârfuri consecutive ale paralelogramului $ABCD$, $A(-1,-1)$, $B(1,-3)$, $C(5,3)$. Să se determine al patrulea vârf al paralelogramului şi unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BD}$.

IV. 1. Pe $\mathbb{Q}$ se definesc legile de compoziţie $x \oplus y = x + y + 2$,
$x \otimes y = xy + 2(x+y) + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.
Să se arate că $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ este corp comutativ izomorf cu $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ printr-un izomorfism de forma $f(x) = \alpha x + \beta$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.

a) Să se traseze graficul lui f. b) Fie şirul (x_n) cu $x_0 = 3$,

$x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$. Să se arate că: $x_n > 1$, $\forall n \geq 0$. c) Dacă $y_n = \dfrac{x_n - 2}{x_n - 1}$, $n \geq 0$, atunci şirul (y_n) este o progresie geometrică.

d) Arătaţi că şirul (y_n) este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_n x_n$.

e) Arătaţi că $-6 \leq \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x \leq \dfrac{15}{2}$.

f) Determinaţi constantele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = ax + b\ln(1+x)$ să fie o primitivă a lui $f_{|(-1,\infty)}$.

(Pentru profilul matematică-fizică, informatică şi metrologie)

Testul 2

I. 1. a) Să se ordoneze crescător numerele: $\sqrt[6]{32}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[3]{5}, \sqrt{3}$.

b) Să se arate că $\sqrt[3]{18+\sqrt{325}} - \sqrt[3]{18-\sqrt{325}} = 3$.

c) Să se rezolve ecuaţiile: 1°) $|x^2-9| + |x^2-4| = 5$;

2°) $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} - \sqrt{3(x-1)} = 0$.

d) Să se rezolve sistemele în $\mathbb{Z}_5$:

$$1°)\ \begin{cases} x + y + \hat{3}z = \hat{1} \\ \hat{2}x + z = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{4} \end{cases} \qquad 2°)\ \begin{cases} X\begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix} \\ X\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

2. Fie şirurile (a_n), (b_n) cu termenii generali

$a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln(n+1)$, $\quad b_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, $x \geq 1$.

a) Să se arate că $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$, $\forall n \geq 1$. b) Să se arate că şirurile sunt convergente şi au aceeaşi limită. c) Să se arate că $a_n \in (0,1)$, $\forall n \geq 2$. d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

II. 1. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+3)}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3^{\frac{1-x}{x}}+3^{\frac{2-x}{x}}+3^{\frac{3-x}{x}}\right)^x$.

2. Să se determine parametrii reali a, b, c pentru care (pe rând):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(an-\sqrt{-2+bn+cn^2}) = 1$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+5x+b}\right)^x = e^{-3}$.

c) $G(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$ să fie primitivă a funcţiei $g(x) = x\sqrt{3-2x}$, $x < \dfrac{3}{2}$; d) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}, & x \leq 1 \\ ax^2+bx+c, & x > 1 \end{cases}$ să fie derivabilă în $x=1$ şi $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = -4$.

III. 1. În sistemul cartezian de coordonate xOy, se consideră punctele $A(3,0)$, $B(0,6)$ şi $C(-3,3)$.

a) Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC. b) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC. c) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

2. Se consideră dreapta de ecuaţie $2x + 3y = 0$. Să se scrie ecuaţia simetricei acestei drepte în raport cu punctul $A(2,2)$.

3. Arătaţi că dreptele în spaţiu de ecuaţii $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -7 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ şi $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ sunt paralele.

IV. 1. Se consideră mulţimea $\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad}(P) \leq 2\}$, împreună cu operaţia de adunare a polinoamelor.

a) Să se arate că $(\mathcal{P}, +)$ formează o structură de grup abelian.

b) Pentru orice $m \in \mathbb{Z}$, se defineşte funcţia $f_m : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $f_m(P) = X^2P'' + (X+3)P' + mP$, unde P', P'' sunt derivatele de ordinul întâi, respectiv al doilea, ale polinomului P. Să se demonstreze că f_m este morfism de grupuri.

2. Fie $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3 + 2x}{2 + x}$.

a) Să se traseze graficul funcţiei f. b) Să se determine punctele de intersecţie ale graficului lui f cu prima bisectoare.

Fie şirul (x_n), $x_0 = -1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$.

c) Să se studieze convergenţa şirului. d) Dacă $y_n = \dfrac{x_n - \sqrt{3}}{x_n + \sqrt{3}}$, $n \geq 1$ atunci şirul (y_n) este o progresie geometrică pentru care se cere primul termen şi raţia. Să se determine apoi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

e) Să se arate că $\dfrac{3}{2} \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \dfrac{5}{3}$.

f) Să se rezolve ecuaţia $\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2a + \ln 6 - 3\ln(a+2)$.

(Pentru profilul matematică-fizică, informatică şi metrologie).

Testul 3

I. 1. Şirul $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este o progresie geometrică cu raţia $b \neq 0$. Se consideră suma $S_n = \dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_na_{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că numerele $\dfrac{1}{a_1a_2}, \dfrac{1}{a_2a_3}, \ldots, \dfrac{1}{a_na_{n+1}}, \ldots$ formează o progresie geometrică. b) Să se arate că $b^2S_n = (b^2+1)S_{n-1} - S_{n-2}$, $\forall n \geq 3$.

Să se calculeze: c) S_n; d) $\frac{S_{n+1}}{S_n}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+m}{x^2}$, m parametru real.

a) Să se determine m astfel încât funcţia să aibă un extrem local în $x=2$. b) Pentru $m=4$, să se reprezinte grafic funcţia obţinută.

c) Pentru $m=4$, să se discute în funcţie de parametrul real p numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $f(x)=p$.

3. Să se determine primitivele următoarelor funcţii:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}$, $g:(5,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}$.

II. 1. Se consideră polinoamele cu coeficienţi reali $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^5-7X^4+19X^3+aX^2-110X+b$, $g=X^3-3X^2-6X+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $c\in\mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului g să fie în progresie aritmetică. b) Pentru $c=8$ să se determine a şi b astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g.

2. Să se rezolve ecuaţia $\log_x\sqrt{5}+\log_x(5x)=\dfrac{9}{4}+(\log_x\sqrt{5})^2$.

3. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x}{b_1^x+b_2^x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a_i,b_i>0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{5n^3+n^2+3}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

III. 1. Suporturile laturilor $[AB]$ şi $[AC]$ ale unui triunghi ABC au, respectiv, ecuaţiile $4x+y-8=0$ şi $4x+5y-24=0$. Vârfurile B şi C ale triunghiului sunt situate pe axa Ox.

a) Să se determine coordonatele vârfurilor triunghiului. b) Să se determine ecuaţia dreptei suport a medianei triunghiului care trece prin A. c) Să se afle lungimea înălţimii din B a triunghiului.

2. Să se determine valorile α şi β pentru care vectorii $\vec{a}=(3,-1,\alpha)$, $\vec{b}=(2,\beta,1)$ sunt perpendiculari dacă $|\vec{b}|=3$.

3. Să se arate că punctele $A(1+2i)$, $B(-5-i)$, $C(7+5i)$ sunt coliniare, iar dreptele $M(6i)N(-4)$, $P(2+6i)Q(3i)$ sunt paralele.

IV. 1. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x\oplus y=x+y+3$ şi $x\otimes y=xy+3x+3y+6$.

a) Să se arate că $(\mathbb{Z},\oplus,\otimes)$ este inel comutativ. b) Inelul are divizori ai

lui zero ? c) Determinaţi elementele inversabile ale acestui inel.

2. a) Să se arate că $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$.

b) Să se arate că $\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$.

c) Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$. Să se arate că şirul (a_n) este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_n a_n$.

(Pentru profilul economic, fizică-chimie, chimie-biologie)

2.3. Metode de calcul ale integralelor definite

1. Formula integrării prin părţi

Teoremă (Formula de integrare prin părţi)
Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii derivabile, cu derivate continue, atunci

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Din $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $x \in [a,b]$ rezultă funcţia $f\cdot g$ este primitivă a funcţiei $f'\cdot g + f\cdot g'$. De aici conform formulei Leibniz-Newton avem:

$$\int_a^b (f\cdot g)'(x)\mathrm{d}x = (f\cdot g)(x)\Big|_a^b = (f\cdot g)(b) - (f\cdot g)(a) =$$

$$= \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x,$$

adică

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = (f\cdot g)(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Probleme rezolvate

Să se calculeze, utilizând formula integrării prin părţi, următoarele integrale:

a) $\int_1^2 x\ln x\mathrm{d}x$; b) $\int_0^1 (x^2-x)e^x\mathrm{d}x$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\mathrm{d}x$;

d) $\int_2^3 \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$; e) $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x$; f) $\int_0^1 \arcsin x\mathrm{d}x$.

R. a) Se ia $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x$ şi deci $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Conform formulei integrării prin părţi rezultă

$$\int_1^2 x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}. \square$$

b) Se pune $f(x) = x^2 - x$, $g'(x) = e^x$ şi deci $f'(x) = 2x - 1$, $g(x) = e^x$. Integrala se scrie:

$$\int_0^1 (x^2 - x) e^x dx = (x^2 - x) e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x - 1) e^x dx = - \int_0^1 (2x - 1) e^x dx.$$

Pentru această integrală se aplică, din nou, formula integrării prin părţi când $f(x) = 2x - 1$, $g'(x) = e^x$ când $f'(x) = 2$, $g(x) = e^x$. Avem

$$\int_0^1 (2x - 1) e^x dx = (2x - 1) e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = e + 1 - 2e^x \Big|_0^1 = -e + 3.$$

Integrala dată este egală cu $e - 3$. $\square$

c) Notăm $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$ şi deci $f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos x$. Avem: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \square$

d) Se scrie integrala sub forma:

$$I = \int_2^3 \sqrt{x^2 - 1} dx = \int_2^3 \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 1}} - \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \int_2^3 x (\sqrt{x^2 - 1})' dx - \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| \Big|_2^3 == ! x \sqrt{x^2 - 1} \Big|_2^3 - \int_2^3 \sqrt{x^2 - 1} dx -$$

$$- \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| \Big|_2^3 = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{8}} - I. \quad \text{Aşadar}$$

$$2I = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{8}}, \text{ adică } I = 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{8}}. \square$$

e) Se scrie integrala succesiv:

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 4}} + 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} =$$

$$= \int_0^1 x (\sqrt{x^2 + 4})' dx + 4 \ln (x + \sqrt{x^2 + 4}) \Big|_0^1 =$$

$$= x \sqrt{x^2 + 4} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2 + 4} dx + 4 \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} - I + 4 \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

De aici $I = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5} + 4 \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right). \square$

f) Dacă alegem $f(x) = \arcsin x$, $g'(x) = 1$, se constată că f nu este derivabilă în $x = 1$! ($f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f'_s(1) = \infty$).

Revenim asupra acestei probleme.

Pentru a calcula integrala se poate aplica formula Leibniz-Newton luând o primitivă $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 1 \end{cases}$.

pentru $f(x) = \arcsin x$, când $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x \mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 1$

Probleme propuse

Să se calculeze integralele:

1) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x$ 2) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x$; 3) $\displaystyle\int_0^2 x^3e^x\mathrm{d}x$; 4) $\displaystyle\int_1^{e^2} x\ln x\mathrm{d}x$;

5) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x$; 6) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x$; 7) $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x$;

8) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$; 9) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$; 10) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$;

11) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$; 12) $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$; 13) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

14) $\displaystyle\int_0^2 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$; 15) $\displaystyle\int_0^\pi (3x^2-4)\cos x\mathrm{d}x$.

2. Metoda substituţiei

Prima metodă de schimbare de variabilă

Are loc următoarea

Teoremă. Fie $[a,b] \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ (J interval din $\mathbb{R}$) două funcţii cu proprietăţile: 1) f este continuă pe J;
2) φ este derivabilă, cu derivata continuă pe $[a,b]$.

Atunci $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x$.

Demonstraţie. Fie $F : J \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f pe J (F există pentru că f este continuă pe J). Atunci din formula lui Leibniz-Newton, membrul drept al egalităţii de demonstrat devine:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)), \qquad (1).$$

Pe de altă parte să observăm că are loc egalitatea (formula de derivare a funcţiilor compuse):

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),\ t \in [a, b],$$

ceea ce arată că $F \circ \varphi$ este o primitivă pentru funcţia $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Aplicând, din nou, formula lui Leibniz-Newton avem:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)), \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă egalitatea din enunţul teoremei.

Probleme rezolvate

1. Să se calculeze integralele:

1) $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$; 3) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x}\mathrm{d}x$;

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^3 x)\mathrm{d}x$; 5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \mathrm{d}x$; 6) $\int_0^1 x\sqrt[5]{1-x^2}\mathrm{d}x$;

7) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$; 8) $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; 9) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; 10) $\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^6+1}$;

11) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + 3}\mathrm{d}x$; 12) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^8+1}}\mathrm{d}x$; 13) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+2^{\sin x}}\mathrm{d}x$.

R. 1) Se consideră $\varphi : [0,1] \longrightarrow [1,2]$, $\varphi(x) = x^2 + 1$ derivabilă cu $\varphi'(x) = 2x$ continuă. Noile limite de integrare sunt $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 2$, iar $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Se scrie integrala sub forma

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}. \square$$

Observaţie. Am spus în primul capitol că φ este funcţia care schimbă variabila şi am notat $t = \varphi(x) = x^2 + 1$. De aici $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$, iar noile limite de integrare sunt $t_1 = x_1^2 + 1 = 1$, $t_2 = x_2^2 + 1 = 2$. Se scrie integrala de calculat ca

$$\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_1^2 = \ln\sqrt{2}. \square$$

2) Fie $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [0,1]$, $\varphi(x) = \cos x$, cu $\varphi'(x) = -\sin x$, funcţie

continuă. Noile limite de integrare vor fi $\varphi(0) = \cos 0 = 1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Integrala se scrie succesiv:

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = -\int_1^0 \frac{du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \square$$

Observaţie. Notând $t = \cos x$ avem: $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$, iar limitele de integrare sunt $t_1 = 1$, $t_2 = 0$. Deci

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = -\int_1^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \square$$

3) Luăm $t = \sin x$ când $\mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$. Noile limite de integrare sunt $t_1 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Integrala se scrie:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\cos x\mathrm{d}x}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x}{\sin x} =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{(1-t^2)\mathrm{d}t}{t} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left(\frac{1}{t} - t\right) = \ln|t|\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 - \frac{t^2}{2}\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 = -\frac{1}{8} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}. \square$$

4) Se aduce integrala la forma $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ şi se substituie $t = \operatorname{tg} x$, când $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Noile limite de integrare sunt $t_1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $t_2 = \sqrt{3}$. Integrala devine $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}. \square$

5) Substituim $t = \cos x$ şi deci $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$. Limitele de integrare sunt $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, ceea ce dă valoarea zero pentru integrală. $\square$

Observaţie. Funcţia de integrat $f(x) = \sin x\cos^2 x$ este impară, iar intervalul de definiţie este simetric în raport cu zero.
Să arătăm că în general

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{dacă } f \text{ este funcţie pară} \\ & (f(-x) = f(x), \forall\, x \in [-a,a]) \\ 0, & \text{dacă } f \text{ este impară} \\ & (f(-x) = -f(x),\ \forall\, x \in [-a,a]) \end{cases}$$

Aceasta este imediat din egalităţile:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x. \square$$

6) Notăm $t = 1 - x^2$ şi deci $\mathrm{d}t = -2x\mathrm{d}x$. Limitele de integrare sunt $t_1 = 1$, $t_2 = 0$. Avem:

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(-2x)\sqrt[5]{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{1}^{0}\sqrt[5]{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} t^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}t = \frac{5}{12}\sqrt[5]{t^6}\Big|_0^1 = \frac{5}{12}. \square$$

7) Fie $t = \ln x$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Avem $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ şi integrala este:

$$\int_{0}^{1} t^2\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \square$$

8) Punem $t = \mathrm{arctg}x$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Limitele de integrare sunt $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$. Deci $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}. \square$

9) Se notează $t = \mathrm{tg}x$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Avem $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{3}$ şi integrala este egală cu $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} e^t\mathrm{d}t = e^t\Big|_0^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}} - 1. \square$

10) Notăm $t = x^3$, $\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$. Avem $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Deci

$$\frac{1}{3}\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}. \square$$

11) Punem $t = \sin^2 x$ şi avem $\mathrm{d}t = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$, $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{3}{4}$,

$$\int_{0}^{\frac{3}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}. \square$$

12) Să observăm că $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^8+1}}$ este funcţie impară pe un interval simetric în raport cu zero şi deci $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0. \square$

13)* $t = -x$ şi avem: $\displaystyle I = \int_{\pi}^{-\pi}\frac{\cos t}{1+2^{-\sin t}}(-\mathrm{d}t) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos t\cdot 2^{\sin t}}{1+2^{\sin t}}\mathrm{d}t.$

Acum $2I = I + I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos t}{1+2^{\sin t}}\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos t\cdot 2^{\sin t}}{1+2^{\sin t}}\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\cos t\mathrm{d}t = 0.$

2. Dacă $g : [0,a] \to [0,b]$ este o funcţie continuă, derivabilă pe $(0,a)$, $g'(x) > 0$, $\forall x \in (0,a)$, $g(0) = 0$, $g(a) = b$, atunci g este inversabilă (h

inversa) şi $\int_0^a g(x)\mathrm{d}x + \int_0^b h(y)dy = ab.$

R. Din $g'(x) > 0$, $\forall x \in (0,a)$ se deduce că g este strict crescătoare pe $(0,a)$, deci injectivă. Pentru $y \in [0,b]$ se consideră funcţia $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, $u(x) = g(x) - y$, evident continuă. Din $u(0) = g(0) - y = -y \leq 0$ şi $u(a) = g(a) - y = b - y \geq 0$, via proprietatea lui Darboux, se deduce că există $x_y \in [0,a]$ astfel încât $u(x_y) = 0$, adică $g(x_y) = y$, ceea ce arată că g este şi surjectivă. Deci g este bijectivă. Fie $h : [0,b] \to [0,a]$ inversa lui g. Atunci $\int_0^a g(x)\mathrm{d}x = \int_0^b yh'(y)dy = yh(y)\Big|_0^b - \int_0^b h(y)dy =$ $= ab - \int_0^b h(y)dy$, unde, în integrala din stânga, am făcut schimbarea de variabilă $g(x) = y$ şi deci $x = h(y)$, $\mathrm{d}x = h'(y)dy$, iar în a doua integrală am integrat prin părţi. □

3. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continuă astfel încât $f(a+b-x) = f(a) + f(b) - f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Să se arate că $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$.

R. Se integrează relaţia dată pe $[a,b]$ şi rezultă

$$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [f(a) + f(b)](b-a).$$

În prima integrală se face schimbarea de variabilă $t = a + b - x$ şi se găseşte $\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. □

Probleme propuse

1. Să se calculeze integralele:

1) $\int_0^1 \frac{(2x-3)\mathrm{d}x}{x^2-3x+8}$; 2) $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+1}$; 3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^8}}$; 4) $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$;

5) $\int_0^1 x^2\sqrt[5]{x^3+2}\mathrm{d}x$; 6) $\int_0^1 \frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{x^5+4}}$; 7) $\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)^3}$;

8) $\int_{\frac{1}{2}}^1 (x+2)\sqrt{2x-1}\mathrm{d}x$; 9) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x(3+e^{-x})}$; 10) $\int_0^1 \frac{e^{3x}\mathrm{d}x}{2+e^x}$;

11) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos x)\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$; 12)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$;

13) $\int_{-1}^1 (3^x + 3^{-x})\mathrm{tg}x\mathrm{d}x$; 14) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$; 15) $\int_{-1}^1 \frac{x^{1995}}{3+x^{1996}}\mathrm{d}x$;

16)* $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)(e^x+1)}$; 17)* $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x+e^{-x}}dx$.

2. Să se demonstreze egalităţile:

1) $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \sin x^2 dx + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\arcsin x}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$;

2) $\int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{\frac{1}{e}} \sqrt{\ln \frac{1}{x}}dx = \frac{1}{e}$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx + \int_0^{\ln 2} \operatorname{arctg}(e^y-1)dy = \frac{\pi}{4}\ln 2$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg} \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arcsin \operatorname{tg} x dx = \frac{\pi^2}{8}$.

A doua metodă de schimbare de variabilă (facultativ)

Teoremă. Dacă $[c,d] \xrightarrow{\varphi} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ sunt două funcţii cu proprietăţile: 1) f este continuă pe $[a,b]$;
2) φ este bijectivă, φ, φ^{-1} sunt derivabile cu derivate continue şi $\varphi'(t) \neq 0$, $t \in [c,d]$.

Atunci $\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Demonstraţie. Cum f este continuă, această funcţie admite primitive pe $[a,b]$. Fie $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ o astfel de primitivă. Avem:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a), \qquad (1).$$

Ţinând seama de derivata funcţiei compuse rezultă:
$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, ceea ce arată că $F\circ\varphi$ este o primitivă pentru $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$. Deci

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F\circ\varphi)(t)\Big|_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = F(b)-F(a), \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă egalitatea ce trebuia probată. ■

Observaţie. Funcţia φ^{-1} este funcţia ce schimbă variabila.
Din $\varphi'(t)\neq 0$, $t\in[c,d]$ se deduce că φ este strict monotonă pe $[c,d]$.

Probleme rezolvate

Să se calculeze integralele:

1) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$, $a>0$; 2) $\int_0^1 \cos^2\sqrt{x}\mathrm{d}x$; 3) $\int_0^1 \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{1+e^x}$;

4) $\int_3^8 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$; 5) $\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$;

6)* Să se determine funcţiile continue $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, dacă

$$\int_1^2 f^2(x^2)\mathrm{d}x - 2\int_1^2 f(x^2)\mathrm{d}x = \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x - \frac{19}{3}.$$

R. 1) Avem $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$. Fie $\varphi:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to$ $\to[-a,a]$, $\varphi(t)=a\sin t$. Funcţia φ este bijectivă şi $\varphi^{-1}(x)=\arcsin\frac{x}{a}$, $\varphi'(t)=a\cos t\neq 0$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi^{-1}(-a)=-\frac{\pi}{2}$, $\varphi^{-1}(a)=\frac{\pi}{2}$. Conform teoremei avem:

$$\int_{\varphi^{-1}(-a)}^{\varphi^{-1}(a)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{2}.\ \square$$

Observaţie. Vom aplica procedeul de la a doua metodă a substituţiei în integrala nedefinită. Notând $x=a\sin t=\varphi(t)$ şi deci $\varphi^{-1}(x)=$ $=\arcsin\frac{x}{a}=t$. De aici $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$, iar noile limite de integrare sunt $t_1=\arcsin(-\frac{a}{a})=-\frac{\pi}{2}$, $t_2=\arcsin(\frac{a}{a})=\frac{\pi}{2}$. Atunci $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{\pi a^2}{2}.\square$$

2) Fie $x=t^2$, adică $t=\sqrt{x}$. De aici $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$, $t_1=0$, $t_2=1$ (t_1,t_2 sunt noile limite de integrare) şi deci

$$\int_0^1\cos^2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int_0^1\cos^2 t\cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1(t+t\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{t\sin 2t}{2}\Big|_0^1 + \frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2+\frac{1}{4}(\cos 2-1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\sin 2+\frac{1}{2}\cos 2\right).\ \square$$

3) Se pune $x=\ln t$, iar de aici $t=e^x$, $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$, $t_1=0$, $t_2=e$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{1+e^x} = \int_1^e \frac{e^{2\ln t}}{1+e^{\ln t}} \cdot \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{t^2}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} = \int_1^e \frac{tdt}{1+t} =$$

$$= t\Big|_1^e - \ln(1+t)\Big|_1^e = e - 1 - \ln(1+e) + \ln 2 = e - 1 + \ln\frac{2}{1+e}. \square$$

4) Se notează $x = t^2 - 1$ şi deci $t = \sqrt{1+x}$, $dx = 2tdt$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$,

$$\int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = 2\int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^3 = \ln\frac{3}{2}. \square$$

5) Se substituie $x = 2\sin t$. De aici $t = \arcsin\frac{x}{2}$, $t_1 = 0$, $t_2 = \arcsin\frac{1}{2} =$

$= \frac{\pi}{6}$, $dx = 2\cos t dt$. Avem: $\int_0^1 x^2\sqrt{4-x^2}dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}2\cos t dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2t dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \square$$

6)* În integrala din dreapta se face substituţia $x = t^2$ şi aceasta devine $\int_1^2 f(t^2)2tdt$, iar $\frac{19}{3}$ se scrie ca $\int_1^2 (x+1)^2dx$. Acum egalitatea din enunţ are forma $\int_1^2 [f(x^2) - (x+1)]^2dx = 0$. De aici $f(x^2) = x+1$, $x \in [1,2]$ şi în fine, $f(y) = \sqrt{y}+1$, $y \in [1,4]$. $\square$

Probleme propuse

Să se calculeze integralele:

1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$; 2) $\int_0^1 \frac{(1+x)dx}{1+\sqrt{x}}$; 3) $\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

4) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}dx$; 6) $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$;

7) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$; 8) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$; 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1}$;

10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$; 11)* $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$;

12)* $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-3\cos x}$; 13) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$;

14)* $\frac{2}{n}\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f^2(x^n)dx \le \frac{1}{2n-1}$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continuă,

$n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. 15)* $\int_{-1}^{1} \frac{f(x^2)\mathrm{d}x}{a^x+1}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continuă şi $\int_{-1}^{1} f(x^2)\mathrm{d}x = 2$. 16)* $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{5}{4}$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă şi $f^3(x) + f(x) \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.c

Subiecte date la admitere în facultăţi

1. Să se calculeze $\int_0^1 x \ln(x + \sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIV. FIZICĂ, BUCUREŞTI, 1997)

2. Fie $f_i : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$ şi $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$, $f_3(x) = e^x$. Fie $I = \int_0^1 \left[\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]^2 \mathrm{d}x$. Atunci:

1) a) $I = 1 - \sqrt{e}$; b) $I = \frac{1}{2}(1-e)$; c) $I = e - 1$; d) $I = e^2 - 1$; e) $I = \frac{1}{2}(e-1)$.

2) a) $f_1 < f_2 < f_3$; b) $f_3 < f_1 < f_2$; c) $f_2 \leq f_1 \leq f_3$; d) $f_1 \leq f_3 \leq f_2$; e) $f_2 \leq f_3 \leq f_1$.

(ADMITERE, A.S.E., MANAGEMENT, FINANŢE BĂNCI, BUCUREŞTI, 1997)

3. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} \ln \frac{|x|+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIV., MATEMATICĂ, CLUJ-NAPOCA, 1997)

4. Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine o relaţie de recurenţă între I_{n+1} şi I_n şi să se calculeze $\lim\limits_n I_n$.

(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ, CLUJ-NAPOCA, 1997)

5. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ cu $\mathrm{grad}(P) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = P(0) + P'(0) + \ldots + P^{(n)}(0).$$

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, CONSTANŢA, 1997)

6. Să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru calculul integralei $I_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$ şi să se calculeze $\lim\limits_n I_n$.

(ADMITERE, UNIV. RELAŢII INTERNAŢIONALE, CONSTANŢA, 1997)

7. a) Să se determine constantele reale m, n, p astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (mx^2 + nx + p)e^x$ să fie primitiva funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x^2e^x$. b) Să se calculeze integrala $I(a) = \int_a^0 (2x^2 - 3x)e^x \mathrm{d}x$, unde a este un parametru real şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{a \to -\infty} I(a)$.

(ADMITERE, UNIV., ŞTIINŢE ECONOMICE, SIBIU, 1997)

8. a) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \int_1^n (x-1)e^{-x} \mathrm{d}x$.

a) 0; b) e^2; c) $e-1$; d) $\frac{1}{e}$; e) $\frac{1}{e} - 1$.

b) Să se calculeze $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$. a) $\frac{\pi}{12}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) 0; d) -1; e) $\frac{\pi}{6}$.

(ADMITERE, UNIV. INGINERI, SIBIU, 1997)

9. a) Să se calculeze $\int_0^1 e^{\mathrm{arctg}x} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$. b) Să se arate că funcţia $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$ se poate integra şi să se calculeze $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, TIMIŞOARA, 1997)

10. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(x^2 + 4x + 2)$.
a) Să se calculeze $f'(x)$; b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei. c) Să se calculeze $\int f(x)\mathrm{d}x$.

11. Să se calculeze integralele definite: $I_1 = \int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x$,

$I_2 = \int_0^\pi x \sin^2 x \mathrm{d}x$. (ADMITERE, UNIV. BUSINESS, CLUJ-NAPOCA, 1998)

12. Fie $f : (-\infty, -2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x+2)^2}e^x$.
1) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei. 2) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F : (-\infty, -2) \to \mathbb{R}$ $F(x) = \frac{ax+b}{x+2}e^x$ să fie o primitivă a lui f pe $(-\infty, -2)$. 3) Să se calculeze $\int_{-4}^{-3} f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, CONSTANŢA, 1998)

13. Fie şirul (I_n) definit prin $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \mathrm{d}x$, $n \geq 1$.
1) Să se arate că (I_n) este monoton şi mărginit. 2) Să se afle o relaţie de recurenţă între I_n şi I_{n-1}. 3) Să se calculeze $\lim\limits_n I_n$.

(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ, IAŞI, 1998)

14. Fie $p > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că

$$\int_0^1 (1-x^p)^n \mathrm{d}x = \frac{n!p^n}{(p+1)(2p+1)...(np+1)}.$$

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, TIMIŞOARA, 1998)

15. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2 + |x^2-4|e^{nx}}{1+(x^2+1)e^{nx}}$. Fie m numărul punctelor de extrem local ale funcţiei, p numărul punctelor de discontinuitate ale funcţiei f, $S = m^2 + p^2$ şi $I = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$. Atunci:

1) a) $S = 5$; b) $S = 10$; c) $S = 2$; d) $S = 4$; e) $S = 13$.

2) a) $I = \dfrac{3\pi}{2}$; b) $I = \dfrac{3\pi - 2}{4}$; c) $I = \dfrac{15\pi - 8}{12}$; d) $I = \dfrac{5\pi + 6}{4}$; e) $I = 0$.

(ADMITERE, A.S.E., R.E.I., BUCUREŞTI, 1999)

16. Se consideră $I_n = \int_0^n e^{-bx} \sin ax \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Fie $L = \lim\limits_n I_n$. Dacă I este valoarea integralei I_n pentru $n = 1$ şi $a = b = \dfrac{\pi}{2}$, atunci:

1) a) $L = 0$; b) $L = \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$; c) $L = \dfrac{a}{a^2+b^2}$; d) $L = \dfrac{b}{a^2}$; e) $L = \dfrac{b}{a}$.

2) a) $I = \dfrac{1}{\pi}(1 - e^{-\frac{\pi}{2}})$; b) $I = \dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\pi}$; c) $I = \dfrac{1-e}{\pi}$; d) $I = \dfrac{\pi^2}{4}e^{-\frac{\pi}{2}}$;

e) $I = \dfrac{4}{\pi^2}e^{\pi}$.

(ADMITERE, A.S.E., ECONOMIE GENERALĂ, BUCUREŞTI, 1999)

17. Limita $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+1) \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$ este: a) 1; b) e; c) $2e$; d) 0; e) $+\infty$.

(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ, CLUJ-NAPOCA,1999)

18. Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \mathrm{tg}x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, SIBIU, 1999)

19. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \int_0^x (t^3 - 3t + 2)e^{t^2}\mathrm{d}t$. Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} |\ x$ este punct de extrem al lui $f\}$, atunci:

a) $A = \{-2\}$; b) $A = \{-2, 1\}$; c) $A = \{1\}$; d) $A = \emptyset$; e) $A = \{-1, 2\}$.

(ADMITERE, A.S.E., CIBERNETICĂ, BUCUREŞTI, 2000)

20. Valorile raţionale ale lui a, b pentru care integrala $I = \int_{-1}^{1} (x^2 + a|x| + b)e^{|x|}\mathrm{d}x$ este un număr raţional sunt:

a) $a \in \mathbb{Q}$, $b = 2$; b) $a, b \in \mathbb{Q}$; c) $b = 1$, $a \in \mathbb{Q}$; d) $b = -1$, $a \in \mathbb{Q}$;

e) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$.

(ADMITERE, UNIV. MATEMATICĂ, TÎRGU-MUREŞ, 2000)

21. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, x\le 1 \\ \dfrac{x^2+1}{2}, x>1 \end{cases}$.

1) Să se determine primitivele funcţiei f. 2) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(e^{-x})}{f(e^2)}dx$.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, BRAŞOV, 2002)

Teste pentru pregătirea examenului de bacalaureat

Testul 1

I. 1. a) Să se rezolve ecuaţia $f(x)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6^x-3^x-3\cdot 2^x+4$. b) Să se arate că funcţia f nu este injectivă.

2. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

a) $\begin{cases} 2^{2x+1}+2^{x+2}<16 \\ (\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x+(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x<10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \log_3(\dfrac{1+2x}{1+x})<1 \\ \log_{\frac{1}{4}}(\dfrac{x-3}{x+3})<-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

3. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$, ştiind că graficul său trece prin punctul $M(1,3)$, iar tangenta la graficul funcţiei în M este paralelă cu prima bisectoare.

II. 1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.

a) Să se calculeze f', f'' şi $f^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n x^2e^{-x}dx$.

c) Fie şirul $(a_n)_{n\ge 1}$, definit prin $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^n(1+e^{-x})dx$. Să se arate că şirul (a_n) este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_n a_n$.

2. Să se calculeze: a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)k^2}{n^4+3n^2+5}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-2+\sqrt{x^2+1}}{x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{3^x-27+\ln(x-2)}{x-3}$.

3. Fie $A=\begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Să se arate că există $B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A=B+iC$.

b) Să se calculeze $B\cdot C$, $C\cdot B$, B^n, C^n, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

c) Să se calculeze $\det(A)$ şi să se verifice identitatea:

$A^2 - 2(2+i)A + 8i \cdot I_2 = O_2$.

d) Să se arate că $A^n \neq I_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

e) Dacă $G = \{I_2, A, A^2, A^3, ...\}$, atunci $(G, \cdot)$ este mod comutativ.

III. 1. Se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,3)$ şi dreapta $d: x - 4y + 7 = 0$.

a) Să se determine coordonatele punctului $C \in d$, astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel cu baza $[AB]$. b) Să se scrie ecuaţia înălţimii din C.

2. Fie ABC un triunghi şi G centrul său de greutate.

a) Să se arate că $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, oricare ar fi punctul O din planul triunghiului. b) Arătaţi că $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

3. Să se determine valorile l, c astfel încât dreapta $(d): \frac{x-2}{l} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ să fie perpendiculară pe planul $(\mathcal{P}): 3x - 2y + cz + 1 = 0$.

IV. 1. Să se determine a, b astfel încât rangul matricei $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & b & b \end{pmatrix}$ să fie egal cu 2.

2. Fie $f: (-\infty, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{6-x}$.

a) Să se traseze graficul lui f.

b) Să se determine punctele de intersecţie ale graficului cu $y = x$.

Fie şirul (x_n) definit prin $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$.

c) Să se studieze convergenţa şirului (x_n).

d) Dacă $y_n = x_n - 2$, $n \geq 0$, atunci $|y_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|y_n|$, $\forall n \geq 0$, iar de aici să se determine $\lim y_n$, $\lim x_n$.

e) Să se determine constantele $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F: (-\infty, 6] \to \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{6-x}$ să fie o primitivă pentru $g(x) = x\sqrt{6-x}$, $x \leq 6$. f) Să se rezolve ecuaţia $\int_x^2 f(t)\mathrm{d}t = -\frac{16}{3} + \frac{2}{3}(6-x)$.

g) Să se arate că $6 \leq \int_2^5 (f \circ f)(x)\mathrm{d}x \leq 3\sqrt{5}$.

(Pentru profilul matematică fizică, informatică şi metrologie)

Testul 2

I. 1. a) Să se determine valorile parametrului real a astfel încât ecuaţia $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$ să aibă toate rădăcinile reale.

b) Să se determine parametrul real a astfel încât

$a \cdot 9^x + 4(a-1)3^x + a - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. a) Să se arate că există cel puţin un număr real $a > 0$ cu proprietatea că $a^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se studieze monotonia funcţiei $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_x(x+1)$ şi apoi să se compare numerele $\log_2 3$, $\log_4 5$.

3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3^n + 5^n}{2^n + 5^n}\right)^{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} [\dfrac{1}{x} + x \ln(1 + \dfrac{1}{x})]^x$.

II. 1. Dacă într-o progresie aritmetică suma primilor zece termeni $S_{10} = 100$, iar suma primilor treizeci de termeni $S_{30} = 900$, atunci să se determine suma primilor cincizeci de termeni.

2. Să se calculeze: a) $\int \dfrac{(x^3 - 6)\mathrm{d}x}{x^4 + 6x^2 + 8}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \int_0^x \dfrac{t + 10}{t + 1} \mathrm{d}t$.

3. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a^3+1 & b^3+1 & c^3+1 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(c-b)(c-a)$.

III. 1. Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin punctele $A(3,1)$ şi $B(-1,3)$ şi are centrul pe dreapta $3x - y - 2 = 0$.

2. a) Să se determine aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{d} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

b) Să se calculeze înălţimea paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{d} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (3, 2, 1)$, $\vec{c} = (0, -1, 2)$, înălţime corespunzătoare bazei determinată de vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$.

3. Să se determine proiecţia punctului $A(2, -1, 3)$ pe dreapta $x = 3t$, $y = -7 + 5t$, $z = 2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

IV. 1. Fie

$$G = \left\{ A_x \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; A_x = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & b^x & 0 \\ 0 & 0 & c^x \end{pmatrix},\ a, b, c > 0,\ a, b, c \neq 1 \right\}.$$

a) Arătaţi că $(G, \cdot)$ este grup abelian, unde „$\cdot$“ este înmulţirea uzuală a matricelor.

b) Să se arate că $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = A_x$ este izomorfism de grupuri $(\mathbb{R}, +) \simeq (G, \cdot)$.

2. Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

a) Să se traseze graficul lui f. b) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ x=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right) \end{cases}$.

c) Fie şirul (a_n) definit prin $a_1=\frac{3}{2}$, $a_{n+1}=f(a_n)$, $n\geq 1$. Să se studieze convergenţa şirului şi să se calculeze $\lim a_n$.

d) Să se arate că $1\leq\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{5}{4}$.

e) Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{x\searrow 0}(f(x))^x$; 2) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\int_t^{2t} f(x)\mathrm{d}x}{3t^2}$.

(Pentru profilul matematică-fizică, informatică şi metrologie)

Testul 3

I. 1. Fie polinomul $f=X^3-3X+\sqrt{2}\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se calculeze $f(\sqrt{2})$. b) Să se determine rădăcinile x_1,x_2,x_3 ale lui f. c) Să se calculeze suma $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{x}$, $x\neq 0$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\neq 0$. b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x=\frac{\pi}{4}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

3. Se consideră funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

a) Să se arate că $f(x)=x-1+\dfrac{2}{x+1}$, $x\in(-1,\infty)$.

b) Să se determine primitivele funcţiei f.

c) Să se calculeze $\int_0^{e-1} f(x)\mathrm{d}x$.

II. 1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^5+bx^2+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Să se determine a,b,c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiţii: $f(0)=1$, $f'(1)=36$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$.

2. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}4&8\\-2&-4\end{pmatrix}$.

a) Să se determine A^2.

b) Să se determine matricea $B=6A^5-3A^2+6I_2$.

c) Să se calculeze determinantul matricei B.

III. 1. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul de ecuaţie $(x-5)^2+(y-4)^2=25$.

a) Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului.

b) Să se verifice că punctul $P(9,7)$ este situat pe cerc.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în punctul $P(9,7)$.

2. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $A(1,-1,-1)$ şi este perpendicular pe dreapta $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$.

IV. 1. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se demonstreze că $\ln(1+t)\leq t$, $\forall\, t\geq 0$.

c) Să se arate că $0\leq I_n\leq \dfrac{1}{n+1}$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

2. Se consideră mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ pe care se defineşte operaţia $x*y=x+y-5xy$, $\forall\, x,y\in\mathbb{Q}$. Să se cerceteze dacă există $a\in\mathbb{Q}$ astfel încât $(\mathbb{Q}-\{a\},*)$ să fie grup comutativ.

(Pentru profilurile economic, fizică-chimie şi chimie-biologie)

3. Formula de medie (facultativ)

Teorema (de medie). Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci există $\xi\in[a,b]$ (ξ se citeşte ksi) astfel încât

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi).$$

Demonstraţie. Se ştie că dacă f este continuă pe un interval închis şi mărginit $[a,b]\subset\mathbb{R}$, atunci ea este mărginită (şi îşi atinge marginile pe interval) adică există $m,M\in\mathbb{R}$ astfel încât $m\leq f(x)\leq M$, $\forall\, x\in[a,b]$. Integrând aceste inegalităţi pe $[a,b]$ rezultă

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a) \text{ sau } m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M.$$

Cum numărul din mijloc este o valoare intermediară între m şi M, înseamnă conform proprietăţii lui Darboux (f fiind continuă are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$) că există $\xi\in[a,b]$ astfel încât

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Observaţii. 1) Numărul $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se numeşte **valoare medie** a lui f pe $[a,b]$.

2) **Interpretare geometrică.** Dacă f este o funcţie **continuă** şi **pozitivă** pe $[a,b]$, atunci există cel puţin un punct $\xi\in[a,b]$ astfel încât subgraficul lui f să aibă aceeaşi arie (fig. 4) cu dreptunghiul de bază $(b-a)$ şi înălţime $f(\xi)$.

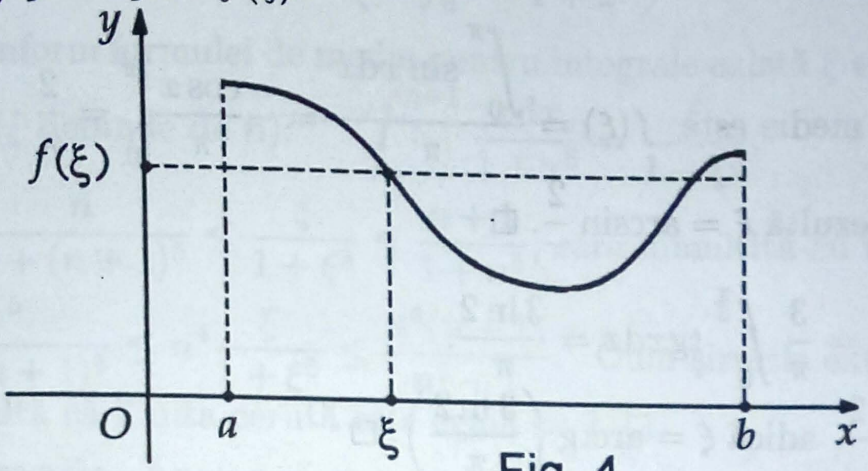


Fig. 4

Teorema (de medie-variantă). Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, $g(x)\geq 0$, $\forall\, x\in[a,b]$, atunci există $\xi\in[a,b]$ astfel încât
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Din f continuă pe $[a,b]$ rezultă că există $m,M\in\mathbb{R}$ astfel încât $m\leq f(x)\leq M$, $\forall\, x\in[a,b]$. De aici şi $g(x)\geq 0$ rezultă
$$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x),\ \forall\, x\in[a,b].$$
Integrând aici pe $[a,b]$ rezultă
$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$
Dacă $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$, atunci se poate lua orice $\xi\in[a,b]$ şi egalitatea are loc. Dacă $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$, atunci $m\leq\dfrac{1}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leq M.$
De aici rezultă că există $\xi\in[a,b]$ astfel încât
$$f(\xi)=\frac{1}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.\ \blacksquare$$

Probleme rezolvate

1) Să se determine valoarea medie pentru următoarele funcţii, determinând şi punctul ξ corespunzător:

a) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$; b) $f:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$;

c) $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+\cos x$.

R. a) Valoarea medie este $f(\xi)=\dfrac{\int_0^{\pi}\sin x\,dx}{\pi}=-\dfrac{\cos x}{\pi}\Big|_0^{\pi}=\dfrac{2}{\pi}$.

Din $\sin\xi=\dfrac{2}{\pi}$ rezultă $\xi=\arcsin\dfrac{2}{\pi}$. □

b) Avem: $f(\xi)=\dfrac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x\,dx=\dfrac{3\ln 2}{\pi}$.

Deci $\operatorname{tg}\xi=\dfrac{3\ln 2}{\pi}$, adică $\xi=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3\ln 2}{\pi}\right)$. □

c) Se obţine

$f(\xi)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=\dfrac{4}{\pi}$, $\xi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. De aici $\sin\xi+\cos\xi=\dfrac{4}{\pi}$ sau $\sqrt{2}\cos\left(\xi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4}{\pi}$ sau încă $\cos\left(\xi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$. De aici $\xi-\dfrac{\pi}{4}=$ $=\pm\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$, adică $\xi=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Se verifică uşor că

$\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}<\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$, deoarece $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. □

2) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\int_1^{1+x}\ln t\,dt$.

R. Formula de medie pentru integrale ne permite să scriem:

$\int_1^{1+x}\ln t\,dt=x\ln\xi$, unde $\xi\in(1,1+x)$.

Trecând aici la limită avem: $\lim\limits_{x\to 0}\int_1^{1+x}\ln t\,dt=\lim\limits_{x\to 0}x\ln\xi=0$. □

Observaţie. Avem: $\int_1^{1+x}\ln t\,dt=(x+1)\ln(1+x)-x$ şi apoi se ia limita.

3) Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, continuă astfel încât $2\int_0^1 f(x)dx=1$. Să se arate că există $x_0\in(0,1)$, astfel încât $f(x_0)=x_0$.

R. Scriem relaţia din ipoteză sub forma: $\int_0^1 [f(x)-x]\mathrm{d}x = 0$. Din formula de medie pentru integrale există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $0 = \int_0^1 [f(x)-x]\mathrm{d}x = f(x_0) - x_0$, adică $f(x_0) = x_0$. □

4) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4 \int_n^{n+1} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^5}\right)$.

R. Conform formulei de medie pentru integrale există $\xi \in [n, n+1]$ astfel încât (ξ depinde de n): $\int_n^{n+1} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^5} = \frac{\xi}{1+\xi^5}$.

Dar $\frac{n}{1+(n+1)^5} \le \frac{\xi}{1+\xi^5} \le \frac{n+1}{1+n^5}$, care înmulţită cu n^4 dă $\frac{n^5}{1+(n+1)^5} \le n^4 \frac{\xi}{1+\xi^5} \le \frac{n^4(n+1)}{n^5+1}$. Cum şirurile extreme au limita 1 rezultă că limita cerută este egală cu 1. □

Observaţie. Analog să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+1} e^{-ax^2}\mathrm{d}x$, $a>0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$.

5) Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt continue pe $[a,b]$ şi dacă $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât $f(c) = g(c)$.

R. Se aplică formula de medie pentru $\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = 0$. □

6) Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi $6\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2a+$ $+3b+6c$, atunci există $x_0 \in [0,1]$ astfel încât $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$.

R. Se consideră $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 6[f(x) - (ax^2+bx+c)]$. Avem: $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 6\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - (2a+3b+6c) = 0$. Din teorema de medie $(\exists)\, x_0 \in [0,1]$, $g(x_0) = 0$. □

7) Să se arate că: a) $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

R. a) Se aplică formula de medie pentru integrale şi apoi se trece la limită. □

Observaţie. Integralele de la a), b) nu pot fi exprimate cu ajutorul funcţiilor elementare şi pentru o astfel de limită se utilizează formula de

medie sau duble inegalităţi.

8) Să se compare numerele $n_1 = \int_1^e x^a \ln x \mathrm{d}x$, $n_2 = \int_1^e 3x^{a-1}\mathrm{d}x$, $a > 1$.

R. Conform formulei de medie (variantă) există $\xi \in [1, e]$ astfel încât $\int_1^e x^a \ln x \mathrm{d}x = \xi \ln \xi \int_1^e x^{a-1}\mathrm{d}x$. Dar $0 \leq \xi \ln \xi \leq e$, pentru $\xi \in [1, e]$ şi deci $\frac{1}{3}\xi \ln \xi \leq \frac{e}{3} < 1$. Deci $n_1 < n_2$.□

9) Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă cu f'' continuă pe $[0, 1]$. Să se arate că există $c \in [0, 1]$ astfel încât

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(c).$$

R. Integrând de două ori prin părţi şi aplicând teorema de medie (variantă) rezultă:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x = f(0) - \frac{(x-1)^2}{2}f'(x)\Big|_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2}f''(x)\mathrm{d}x = f(0) + \frac{f'(0)}{2} + \frac{1}{6}f''(c), \text{ unde } c \in [0, 1]. \square$$

Probleme propuse

1) Să se determine valoarea medie pentru următoarele funcţii, determinând şi punctele ξ corespunzătoare: a) $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$; b) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; c) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2) Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continuă cu proprietatea $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $\frac{1}{1+c} < f(c) < \frac{1}{2c}$;

3) Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3 \int_n^{2n} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^5}\right) = \frac{7}{24}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \int_n^{n+1} \frac{x^7}{1+x^{10}}\mathrm{d}x = 1$.

4) Să se compare numerele:

1) $n_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^a 2^x \mathrm{d}x$, $n_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}\mathrm{d}x$, $a > 1$;

2) $n_1 = \int_1^e e^x \ln^3 x \mathrm{d}x$, $n_2 = \int_1^e 27 \ln^2 x \mathrm{d}x$.

5) Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel ca $f(a) > 0$ şi

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t < 0$. Să se arate că există $\xi \in (a,b)$ astfel încât $f(\xi) = 0$.

6) Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Să se arate că există $\xi \in [0,1]$ astfel ca $f(\xi) = \xi^2$.

7) Dacă $f : [0,1] \to [0,\infty)$ este o funcţie continuă cu proprietatea $\int_0^1 \sin f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$, atunci există $c \in [0,1]$ astfel încât

$c^2 \sin f(c) + \sin f(c) - 1 = 0$.

8) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, atunci există $c \in [0,1]$ astfel încât $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = f(c)$.

9)* Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, derivabilă cu f' continuă pe $[0,1]$. Să se arate că există $\xi \in [0,1]$ astfel ca $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0) + \frac{1}{2}f'(\xi)$.

10)* Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, o funcţie continuă. Să se arate că există $c_1, c_2, \cdots, c_n \in [a,b]$ astfel încât: 1) $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$;

2) $f(c_1) + 2f(c_2) + \cdots + nf(c_n) = \frac{n(n+1)}{2(b-a)} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

11)* Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, monoton crescătoare. Să se arate că $\forall\, t \in [a,b]$ are loc inegalitatea: $\int_a^t f(x)\mathrm{d}x \le \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

12)* Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continuă, monoton descrescătoare. Atunci $\forall\, x \in (a,b)$ au loc inegalităţile:

$$\frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \le \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

13)* Fie funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea (p) :

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(2n+x)\mathrm{d}x = a \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(2n+1+x)\mathrm{d}x = b \in \mathbb{R}$ cu $a \neq b$.

1) Să se arate că nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \pi x$ are proprietatea (p).

2) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(2nx+1)\mathrm{d}x$.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

pag. 140. 1. 1) $\frac{1}{4}(e^2+1)$; 2) $\sin 1-\cos 1$; 3) $\frac{64}{3}$; 4) $\frac{61}{3}$; 5) $\frac{8}{3}$; 6) $\frac{e^2-1}{4}$; 7) $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$; 8) $\pi\sqrt{2}-4$; 9) $\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$; 10) $\frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{4}$; 11) $\frac{3\pi}{2}-\frac{152}{35}$; 12) $9+4\ln 2$; 13) $\frac{1}{2}\ln 3$; 14) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$; 15) $\frac{2}{3}\ln 2$; 16) $\frac{\pi}{4}$; 17) $\frac{\pi}{8}$; 18) $\frac{1}{2}\ln\frac{13}{10}$; 19) $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$; 20) $\ln\frac{8}{3}-1$; 21) $\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}$; 22) $2\left(3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)$; 23) $\frac{17}{12}$; 24) $2(2-\ln 3)$; 25) $\frac{4-\pi}{2}$; 26) $\frac{4}{15}$; 27) $\frac{8}{15}$; 28) $\frac{2}{15}$; 29) $\ln\sqrt{2}-\frac{1}{4}$; 30) $\frac{1}{2}$; 31)* $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}$; 32*) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **2.** Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă pentru f pe $\mathbb{R}$. Relaţia din ipoteză devine: $F(n+1)-F(n)=n^2$. Scriind această egalitate pentru $n-1, n-2, \cdots, 1$ şi adunând aceste egalităţi rezultă $F(n+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+F(1)$. Se găseşte $f(x)=F'(x)=\frac{6x^2-6x+1}{6}$.

3. Se pune $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ şi rezultă $F(y)=\frac{2}{\sqrt{y^2-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}$, dacă $y>1$ şi $F(y)=\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\frac{\ln(\sqrt{1-y}+\sqrt{1+y})}{2|y|}$ dacă $y<1$.

pag. 147. 1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$; 2) $\ln 2-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\pi+\ln 4}{4}$; 4) $\frac{e-1}{2}$; 5) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})$; 8) 0; 9) $\frac{1}{2}$; 10)* $a_n=\frac{1}{2n^2}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k}{n}\right]$, $\frac{1}{2}\sin^2 1$; 11)* $\frac{4}{e}$; 12) 2; 13) $\frac{3}{4}$; 14) $\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$; 15) $\frac{\pi}{4}$; 16*) $\frac{1}{4}$; 17*) $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{2k-1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2}}$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $D_n=\left(0,\frac{2}{2n},\frac{4}{2n},\cdots,\frac{2n}{2n}\right)$; 18)* $2e^{(\pi-4)/2}$; 19)* $2^{\ln\sqrt{2}}$.

pag. 149. 1. b); **2.** $a\le 1$, $I=\ln\frac{4-a}{2-a}$; $a\in(1,3]$, $I=\ln a(4-a)$; $a>3$, $I=\ln\frac{a}{a-2}$; **3.** $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$; **4.** $a_n=\ln\frac{n^2}{n^2+1}+\operatorname{arctg}n+\ln 2-\frac{\pi}{4}$; $\ln 2+\frac{\pi}{4}$; **5.** $f'(-1)=f'(1)=0$; $m=0$, $n=-3$, $p=1$; **6.** b); **7.** a) $3-\sqrt{3}$; b) $\frac{98}{3}$; **8.** a) $\frac{1}{10}\ln\frac{a^2+4}{(a+1)^2}+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{a}{2}$; b) $\frac{\pi}{5}$; c) $I'(a)>0\Rightarrow I$ strict crescătoare;

9. $2(2-\text{arctg}2)$; **10.** e); **11.** 1) $t \geq 0$, $e^t \geq$., $e^{-t} \leq 1$, $I = \int_0^1 \frac{e^t-1}{e^{-t}}dt$; a); 2) $g(t) = e^{2t}-e^t$; a); **12.** 1) b); 2) b); **13.** $1-\ln\frac{3}{2}$; **14.** a) $x=1$, $y=x-4$ (la $+\infty$), $y=x+2$ (la $-\infty$); **15.** $\ln\frac{\sqrt{n^2+3}}{n+1}+\sqrt{3}\text{arctg}\frac{n}{\sqrt{3}}-\ln\sqrt{3}$; $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}-\ln\sqrt{3}$; **16.** 1) $f(x)=x$ dacă $x\in[0,1]$; $f(x)=\frac{2}{x^2+1}$, dacă $x>1$; $a_n=\frac{1}{2}+$ $+2\text{arctg}n-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi+1}{2}$; 2) $I_n=\int_1^n \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx$; $\frac{\pi+\ln 4}{4}$; **17.** 1) $y=1$ (la $+\infty$), $y=-1$ (la $-\infty$); 2) f impară $\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx=0$; **18.** 1) b); 2) a). **19.** $f(x)=x$, $x\in[-1,0]\cup[1,2]$, $f(x)=x^3$, $x\in[-2,-1)\cup(0,1)$; d); **20.** $\int_0^x f(t)dt = F(x)-F(0)$, unde F este primitiva lui f; relaţia $(x+1)f(x)=$ $=x^3+F(x)-F(0)$ se derivează şi rezultă $f'(x)=3x-3+\frac{3}{x+1}$ care derivată de 24 ori rezultă $f^{(25)}(x)=\frac{3\cdot 24!}{(x+1)^{25}}$; d); **21.** În relaţia dată se înlocuieşte x cu $\frac{1}{x}$ şi din sistemul obţinut de necunoscute $f(x), f\left(\frac{1}{x}\right)$ se deduce $f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^2}-x^2\right)$; a) **22.** $t=\frac{2-x}{2+x}$; a).

pag. 152. Testul 1. I. 1. a) $n=8$; b) $x=0$; **2.** a) $e^{-\frac{1}{6}}$; b) 0; c) $t=\frac{1}{x}\to 0$; $\frac{1}{2}$; **II. 1.** b) $x*y=\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$; $e=\frac{1}{2}$; $x'=1-x\in G$; $f(x*y)=f(x)f(y)$ şi f este bijectivă; **2.** Se aplică şirul lui Rolle; $m\geq -\frac{1}{e}$; **3.** a) $I_0=\int_0^1 xe^{-x}dx$; c) Se utilizează b); $s_n=\frac{4}{3}\left(1-\frac{2}{e}\right)\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)$. **III. 1.** a) $AC=BC=5$; b) $AB=\sqrt{2}$; $10+\sqrt{2}$; c) $\frac{7}{2}$; **2.** $x-y-1=0$; **3.** $a=-3$, $b=\frac{9}{2}$; **IV. 1.** a) $\frac{5}{4}e^4-\frac{1}{4}$; b) $f'(t)=(1+t)e^{2t}$; c) ∞; **2.** a) $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, b) $B^n=O_3$, $n\geq 2$; c) $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$; **3.** a) $f^{(n)}(x)=3^ne^{3x}$, $\forall n\geq 2$; b) f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$ şi din $x\geq 0$ rezultă $f(x)\geq f(0)$.

Testul 2. I. 1. a) $f''(x)\geq 0$; b) $x=0$ punct de extrem; $\mathbb{R}-\{0\}$; **2.** a) f bijectivă; b) $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{1+x}, & x\geq -1\\ -\frac{x+1}{3}, & x<-1\end{cases}$. Egalitatea $f(x)=f^{-1}(x)$

se realizează în acele puncte de pe grafic situate pe prima bisectoare $y = x$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; **3.** Din condiţiile de existenţă $x \in \{2,3,4\}$; 2; **II. 1.** a) $1+x=t^6$; $\frac{3}{5}(\sqrt[6]{x+1})^{10}+\frac{6}{7}(\sqrt[6]{x+1})^7-\frac{3}{2}(\sqrt[6]{x+1})^4+C$; b) 5; **III. 1.** $(x-2)^2+(y-4)^2=10$; **2.** $(1,-3)$, $(3,1)$, $(-5,7)$; **3.** $c=2$; **IV. 1.** a) $D=(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,\infty)$; $D_c=D$; $D_d=D-\{\pm1,0\}$; **2.** $\Delta=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$; a) Dacă f are rădăcinile x_1,x_2,x_3, câte două distincte, atunci din $f=a(X-x_1)(X-x_2)$ deducem $f(x_3)=0$, adică $a(x_3-x_1)(x_3-x_2)=0$. De aici $a=0$ şi deci $f=0$, ceea ce dă $b=c=0$. Altfel din $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$ rezultă un sistem omogen de necunoscute a,b,c având $\Delta\neq 0$ ceea ce dă $a=b=c=0$; b) Din a) $\Rightarrow m^2-3m+2=0$, $m^2-5m+4=0$, $m-m^2=0$ cu soluţia $m=1$. **Testul 3.** a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$; b) $D_d=\mathbb{R}$, $f'(x)=2(-3^{-2x}+3^{-x})\ln 3$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0$; pe $(-\infty,0)$ funcţie strict descrescătoare, pe $(0,\infty)$ funcţie strict crescătoare; $x=0$ punct de minim; c) $x=\frac{\ln 2}{\ln 3}$; **2.** Ecuaţia admite şi rădăcina conjugată $\overline{z}=1-2i$; $a=-27$, $b=30$; $z_1=1+2i$, $z_2=1-2i$, $z_3=2$, $z_4=3$. **3.** Se calculează $\det(A)$ şi se rezolvă ecuaţia în m $\det(A)=0$; $m\neq 8\Rightarrow\operatorname{rang}(A)=3$, $m=8$, $\operatorname{rang}(A)=2$; b) $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=-1$, $t=2-\alpha-\frac{3\beta}{2}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; **II. 1.** a) Coordonatele lui A verifică ecuaţia dreptei d_m; b) Cercul are centrul în $O(0,0)$ şi raza $R=\frac{1}{2}$. Condiţia ca dreapta d_m să fie tangentă la cerc este ca distanţa de la O la d_m să fie egală cu $\frac{1}{2}$. Deci $\frac{1}{2}=\frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+4}}$. Găsim $m_1=0$ şi $m_2=-\frac{8}{3}$. Ecuaţiile tangentelor sunt $2x=-1$ şi $6x+8y-5=0$; c) $\frac{2}{3}$. **2.** a) $A\left(\frac{3}{5},\frac{7}{5}\right)$; b) $8x-7y+5=0$; $5x-5y+4=0$; **3.** $AB=\sqrt{180}$, $AC=\sqrt{195}$, $BC=\sqrt{185}$; **III. 1.** a) $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$; b) $x=0$; c) f este descrescătoare pe $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ şi crescătoare pe $(0,\infty)$; $x=0$ punct de minim; d) $f'(2)=\frac{2}{9}e^2=m$ (panta); $2e^2x-9y-e^2=0$; **2.** a) $f=(X-1)g$; b) $x_k^4+x_k^3+x_k^2+x_k+1=0$ înmulţită cu x_k-1 dă $x_k^5-1=0$, $k=\overline{1,4}$; c) $S=-1$, $T=\sum x_1^5\cdot x_1^2=\sum 1\cdot x_1^2=\sum x_1^2=(\sum x_1)^2-2\sum x_1x_2=1-2\cdot 1=-1$; **IV. 1.** a) a.v., $y=1$ a.o.; b) $F'(x)=f(x)$, $\forall x<\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{2}{5}$, $b=-\frac{1}{5}$, $c=-\frac{3}{5}$; Integrala definită este egală cu $F(1)-F(0)$. **3.** b) $f'(x)<0\Rightarrow f$ strict descrescătoare $\Rightarrow f$ injectivă; $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\searrow -1}=\infty$, f continuă $\Rightarrow f$ surjectivă; e) $f(\frac{1}{2}*\ldots*\frac{1}{2000})=f(\frac{1}{2})\ldots f(\frac{1}{2000})=\frac{1}{2001}\Rightarrow\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\ldots*\frac{1}{2000}=$

$f^{-1}(\frac{1}{2001}) = \frac{2000}{2002}$.

pag. 167. 1) a) $\frac{4\sqrt{2}-1}{3}$; b) Se explicitează f; $10-\sqrt{2}-\sqrt{3}$;

c) Avem: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-2,-1] \\ x^2-1, & x \in (-1,2] \end{cases}$; $-\frac{1}{2}$;

d) $f(x) = \begin{cases} x^2-x+4, & x \in [0,1] \\ 5x-1, & x \in (1,3] \end{cases}$; $\frac{131}{6}$; e) 4; f) $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \in [-1,0] \\ 3^x, & x \in (0,1] \end{cases}$;

$\frac{4}{\ln 3}$; g) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in [0,2] \\ x^2, & x \in (2,4] \end{cases}$; $\frac{3}{\ln 2} + \frac{56}{3}$. **2)** a) $2e^2-1$; b) $\ln 2 - \frac{1}{2}$;

c) $\frac{7\pi}{16}$. **3)** a)* Din $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ rezultă $e^{-x} < e^{-\sin x} < e^{-\frac{2x}{\pi}}$, care se integrează pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; b) Avem $a = \int_0^a dx < \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} <$

$< \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin a$; c)* Dacă $x \in [0,1]$, atunci au loc inegalităţile:

$4-2x^2 \leq 4-x^2-x^3 \leq 4-x^2$ şi de aici $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-x^2}}$; care se integrează pe $[0,1]$. **4)** Se determină $m, M \in \mathbb{R}$ pentru care $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a,b]$, după care se integrează pe $[a,b]$. **5)** Pentru a demonstra o inegalitate de forma $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, f, g derivabile pe $[a,b]$, se arată că $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a,b]$. Pentru inegalităţi stricte a se vedea Corolar 2 de la P6. **7)** a) Din $0 \leq 1-x^2 \leq 1$, $x \in [0,1]$ rezultă $0 \leq I_n \leq 1$, iar din $(1-x^2)^{n+1} \leq (1-x^2)^n$ se deduce $I_{n+1} \leq I_n$; deci (I_n) este convergent;

b)* Se explicitează partea întreagă şi se obţine $[\ln x] = -k$ dacă $x \in \left[\frac{1}{e^k}, \frac{1}{e^{k-1}}\right)$.

Acum $I_n = -\left(1-\frac{1}{e}\right)\left[1+\frac{2}{e}+\cdots+\frac{n-1}{e^{n-2}}+\frac{n}{e^{n-1}}\right]$. Pentru calculul sumei din paranteza dreaptă se pune $x = \frac{1}{e}$ şi avem suma $1+2x+3x^2+\cdots+$

$+nx^{n-1} = (x+x^2+\cdots+x^n)' = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$. Deci

$I_n = -\frac{e-1}{e} \cdot \frac{n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{e}\right)^n + 1}{(e-1)^2} \cdot e^2 \to \frac{e}{1-e}$; c) $I_{n-1} = \frac{e}{n} - \frac{I_n}{n}$, $\lim_n I_{n-1} = 0$; d) $I_n = \frac{1}{4}\left[\operatorname{arctg}(n^4+1) - \frac{\pi}{4}\right]$; $\frac{\pi}{16}$; e) $0 \leq x^n e^x \leq e$ şi deci $0 \leq I_n \leq e$; din $x^{n+1} \leq x^n$ pentru $x \in [0,1]$ rezultă $x^{n+1}e^x \leq x^n e^x$ şi deci $I_{n+1} \leq I_n$; integrând prin părţi rezultă $I_{n-1} = \frac{e}{n} - \frac{I_n}{n}$ şi de aici $\lim_n I_n = 0$;

f)-g) $I_n \leq 1$, $I_{n+1} \geq I_n$; g) $I_n = \int_{e^{-n}}^{1} \frac{\ln(1+y)dy}{y} < 1$. **8)** a) $x = \sin t$, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$; b) Se calculează I_n în două moduri: după binomul lui Newton şi după relaţia de recurenţă. Se obţine $S_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$. **9)** Prin absurd, presupunem că f este injectivă. Cum f este continuă, deducem că f este strict monotonă. Dacă f este strict crescătoare, atunci $f(x)-f(a) \geq 0$, $f(b)-f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ şi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > (b-a)f(a)$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < (b-a)f(b)$, contradicţie ! **10)*** Avem $[f(x)-m][f(x)-M] \leq 0$ sau $f^2(x) - (M+m)f(x) + Mm \leq 0$, care se integrează pe $[a,b]$. **11)** Se explicitează partea întreagă; $\int_0^1 [3^n x]\mathrm{d}x = \frac{3^n - 1}{2}$; 0. **12)** Avem: $\int_1^{n^3} [\sqrt[3]{x}]\mathrm{d}x =$

$$\int_1^{2^3} \mathrm{d}x + \int_{2^3}^{3^3} 2\mathrm{d}x + \int_{3^3}^{4^3} 3\mathrm{d}x + \cdots + \int_{(n-1)^3}^{n^3} (n-1)\mathrm{d}x =$$

$$= -(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + n^4 = \frac{1}{4}(3n^4 - 2n^3 - n^2) = f(n).$$

13) Integrând prin părţi găsim $\int_0^1 x(1+x)^n \mathrm{d}x = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$. Utilizând binomul lui Newton $x(1+x)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + \cdots + C_n^n x^{n+1}$ şi prin integrare termen cu termen găsim $\int_0^1 x(1+x)^n \mathrm{d}x = \frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \cdots + \frac{C_n^n}{n+2}$.
Egalând cele două exprimări rezultă egalitatea dorită.

pag. 173. 1. $\sqrt{2} - 1 + \ln(1+\sqrt{2})$; **2.** a) $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \ln\sqrt{2}$, $I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$; b) $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$; c) $I_{2m+1} = \frac{1}{2m} - I_{2m-1}$, $I_{2m-1} = \frac{1}{2(m-1)} - -I_{2m-3}, \ldots, I_3 = \frac{1}{2 \cdot 1} - I_1$; $I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$ şi se adună; **3.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^3 + \sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x +$ $+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2x+1}{x^2+2}\mathrm{d}x = 0 + 2\mathrm{arctg}\frac{\pi}{2}$; **4.** b) $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$; c) $e^{x^2} \geq x^2 + 1$ care se integrează pe $[-1,1]$. **5.** 1) e; 2) a; **6.** a) $\sqrt{2} - 1$; b) $I_n > 0$, $0 < I_n <$ $< \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$; 0; **7.** c); **8.** 1) b); 2) a); **9.** f); **10.** 1) c); 2) Se pune $y = \frac{1}{x}$ şi apoi se aplică l'Hospital; d); **11.** $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \to k \leq nx <$ $< k+1$, $[nx] = k$, $k = \overline{0, n-1}$; $I_n = n\left(\mathrm{e} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\right)$;

$$L=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\lim_{n\to\infty}\left(e-\frac{1}{n}\sum e^{\frac{k}{n}}\right)=1\left(e-\int_0^1 e^x dx\right)=1;\ e).$$

pag. 174. Testul 1. I. 1. a) $D=\left(0,\frac{1}{5}\right]\cup(1,\infty)$; b) 25; c) $x\geq 25$; **2.** a) $a=1,\ b=2,\ c=3$; b) $l_s(2)=-\infty,\ l_d(2)=\infty$; c) $\ln\frac{2^{17}\cdot 3}{5^6\cdot 7^3}$; d) $x_1\in(1,2),\ x_2\in(2,3),\ x_3>3$ dacă $a>0$; $x_1<1<x_2<2<x_3<3$ dacă $a<0$; **II. 1.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $\ln 2$; c) 3; d) 0; **2.** a) $x=t^2$; $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{x}-4\sqrt{x}-4\ln(1+\sqrt{x})+C$; b) $x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$; c) $-\frac{2}{3}$; d) $2+\frac{9}{4}\ln 3-\frac{3}{4}\ln 5$; **III. 1.** a) $A\left(\frac{11-\sqrt{7}}{8},\frac{11+\sqrt{7}}{8}\right),\ B\left(\frac{11+\sqrt{7}}{8},\frac{11-\sqrt{7}}{8}\right)$; b) $m_{AB}=-1$; **2.** a) $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$; b) $D(3,5)$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD})$; $\arccos(\frac{11}{\sqrt{13\cdot 17}})$; **IV. 1.** $e_\oplus=-2,\ e_\otimes=-1$; din $f(-2)=0,\ f(-1)=1$ $(f:(\mathbb{Q},\oplus,\otimes)\to(\mathbb{Q},+,\cdot))\Rightarrow\alpha=1,\ \beta=2$; **2.** a) $y=4$ a.o., $x=-1$ a.v.; b) inducţie matematică; c) $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{2}{3}$; $y_0=\frac{1}{3},\ q=\frac{2}{3}$; d) $y_n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$; e) f este crescătoare pe $(0,3]$ şi deci $f(0)=-2\leq f(x)\leq\frac{5}{2}=f(3)$, care se integrează pe $[0,3]$; f) $F'(x)=f(x),\ \forall x>-1\Rightarrow a=4,\ b=-6$. **Testul 2. I. 1.** a) Se aduc radicalii la acelaşi ordin (12) şi găsim $\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}<\sqrt[6]{32}$; b) Fie $x=\sqrt[3]{18+\sqrt{325}}-\sqrt[3]{18-\sqrt{325}}$. Se ridică la cub şi se obţine ecuaţia $x^3+3x-36=0$ cu unica soluţie reală $x=3$; c) 1°) $x\in[-3,-2]\cup[2,3]$; 2°) $x=4$; d) 1°) $x=\widehat{3},\ y=\widehat{0},\ z=\widehat{1}$; 2°) $X=\begin{pmatrix}\widehat{2}&\widehat{3}\\\widehat{0}&\widehat{4}\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}\widehat{2}&\widehat{0}\\\widehat{3}&\widehat{4}\end{pmatrix}$; **2.** a) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)>0\Leftrightarrow e>(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$; se verifică imediat $b_{n+1}-a_{n+1}>0$; $b_{n+1}-b_n>0\Leftrightarrow e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$; b) din a) şi $a_n-b_n=\ln\frac{n+1}{n}$ rezultă $\lim a_n=\lim b_n$; c) Inducţie matematică; d) Suma se scrie sub forma $(a_{2n}-a_n)+\ln\frac{2n+1}{n+1}$; **II. 1.** a)

$\frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+3} \Rightarrow A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{1}{6}$; $\frac{7}{36}$; b) $\ln 6$; c) 9; **2.** a) $a = c = 1,\ b = 0$; b) $a = 2,\ b \in \mathbb{R}$; c) $a = \frac{2}{5},\ b = -\frac{1}{5},\ c = -\frac{3}{5}$; d) $a = -\frac{129}{8},\ b = 33,\ c = -\frac{127}{8}$; **III. 1.** a) $G(0,3)$; b) $3(2\sqrt{5} + \sqrt{2})$; c) $\frac{27}{2}$; **2.** $2x + 3y - 20 = 0$. **IV. 2.** b) Se rezolvă sistemul $y = \frac{3+2x}{x+2},\ y = x$; c) $x_n \nearrow \sqrt{3}$; d) $y_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$; $q = (2-\sqrt{3})^2$. **Testul 3. I. 1.** a) Dacă $a_1 = a$, atunci $a_n = a \cdot b^{n-1}$. Avem $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a^2 b^{2k-1}}$, $\frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{a^2 b^{2k+1}}$ şi deci $\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}} : \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{b^2}$ este raţia progresiei; b)-c) Se calculează în funcţie de a, b şi n; d) $\frac{b^{2n+2}-1}{b^{2n+2}-b^2}$; e) $\frac{1}{b^2}$ dacă $-1 < b < 1$; 1 dacă $b < -1$ sau $b > 1$; **2.** a) $m = 4$; b) $x = 0$ a.v., $y = x - 3$ a.o.; c) $p < 0$, o soluţie reală; $p = 0,\ x_1 < 0$ şi $x_2 = 2$ soluţie dublă; $p > 0$, trei soluţii diferite; **3.** a) $2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$; b) $\frac{x^2}{2} + 7x - 18\ln(x-1) + 55\ln(x-5) + C$; **II. 1.** a) Relaţiile lui Viète; $c = 8$; b) Restul identic zero; $a = -7,\ b = 104$; **2.** $x \in \{5, \sqrt[5]{5}\}$; **3.** a) $\sqrt{\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}}$; b) $\frac{1}{15}$; c) $\frac{2}{9}$; **III. 1.** a) $A(1,4),\ B(2,0),\ C(6,0)$; b) $M(4,0),\ AM:\ 4x + 3y - 16 = 0$; c) $d(B, AC) = \frac{16}{\sqrt{41}}$; **2.** $(\alpha = -8,\ \beta = -2)$, $(\alpha = -4,\ \beta = 2)$; **3.** $A(1,2),\ B(-5,-1),\ C(7,5)$ sunt puncte coliniare, iar dreptele $A(0,6)B(-4,0),\ C(2,6)D(0,3)$ sunt paralele având aceeaşi pantă $m_{AB} = m_{CD} = \frac{3}{2}$; **IV. 1.** a) $e_\oplus = -3$; $e_\otimes = -2$; b) nu; c) $x = -2,\ x = -4$ sunt singurele elemente inversabile; **2.** a) $f_1(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$; $f_1'(x) > 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow f_1$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. Din $x > 0 \Rightarrow f_1(x) > f_1(0) = 0$; b) Din $\ln(1+x) < x \Rightarrow \ln(1+x^n) < x^n,\ x > 0$, care se integrează pe $[0,1]$; c) $(a_n) \searrow 0$.

pag. 181. 1) $1 - \frac{2}{e}$; 2) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$; 3) $2(e^2+3)$; 4) $\frac{3e^4}{4} + \frac{1}{4}$; 5) 0; 6) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; 7) $\frac{\pi}{8}$; 8) $1 - \frac{2}{e}$; 9) $2 - \frac{5}{e}$; 10) $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$; 11)

$\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{8}\ln(1+\sqrt{2})$; 12) $\frac{2(\sqrt{2}+1)}{15}$; 13) 2; 14) $\frac{3}{2}\ln 3$; 15) -6π.

pag. 185. 1. 1) $\ln\frac{3}{4}$; 2) $\frac{\pi}{8}$; 3) $\frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{5}{18}(3\sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{2})$; 6) $\frac{2}{5}(\sqrt{5}-2)$; 7) $\frac{3}{8}$; 8) $\frac{14}{15}$; 9) $\ln\frac{4e}{3e+1}$; 10) $\frac{(e-1)(e-3)}{2} + 4\ln\frac{e+2}{3}$; 11) funcţie impară pe interval simetric în zero; 0; 12)* $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^x+\sin x+\cos x)+(e^x+\sin x+\cos x)'\mathrm{d}x}{e^x+\sin x+\cos x} =$ $= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(e^{\frac{\pi}{2}}+1) - \frac{1}{2}\ln 2$; 13) 0; 14) 0; 15) 0; 16)* Se scrie integrala ca sumă $\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(e^x+1)} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(e^x+1)}$, iar în prima integrală se pune $t = -x$; $\frac{\pi}{4}$; 17)* 0.

2. Se aplică problema 2 de la probleme rezolvate.

pag. 188. 1) $2 - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{11}{3} - \ln 16$; 3) $\frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{1}{3}$; 4) $x = \frac{1}{\cos t}$, $\sqrt{3} - \frac{\pi}{12} - 1$; 5) $x = \operatorname{arctg} t$, $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right)$; 6) $t = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$, $x = \varphi(t) = \frac{2t^2-1}{t^2+1}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{11-2\sqrt{10}}{3}$; 7) $\frac{4}{3}(1 - \ln 2)$; 8) $2(1+\ln 2)$; 9) $\frac{2}{3}\ln 2$; 10) $\frac{1}{2}\ln 2$; 11)* $x = \operatorname{tg} t$ şi se obţine $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\ln 2\mathrm{d}t +$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\ln 2 + I_1 - I_2$. Dar $I_1 = I_2$; 12)* Funcţia $f(x) = \frac{1}{4-3\cos x}$ este continuă pe $[0, 2\pi]$ şi deci admite primitive pe $[0, 2\pi]$. Fie $F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Atunci

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}\right), & x \in [0, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{7}}, & x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{7}}, & x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Deci $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = F(2\pi) - F(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}$. 13) Se face schimbarea de variabilă $x = \pi - t$ şi integrala dată (I) se scrie

$$I = -\int_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\pi \sin t}{1 + \cos^2 t}\mathrm{d}t - I.$$ 14)* În $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ se face schimbarea de variabilă $x = t^n$. Cum $\frac{1}{2n-1} = \int_0^1 x^{2n-2}\mathrm{d}x$ se aduce inegalitatea din enunţ la $\int_0^1 [x^{n-1} - f(x^n)]^2\mathrm{d}x \geq 0$. Avem egalitate pentru $f(x) = \sqrt[n]{x^{n-1}}$. 15)* În integrala I de calculat se face $x = -t$ şi se obţine $I = \int_{-1}^1 \frac{f(t^2)a^t\mathrm{d}t}{a^t + 1} = \int_{-1}^1 \frac{f(t^2)(a^t + 1) - f(t^2)}{a^t + 1}\mathrm{d}t = 2 - I$. De aici $I = 1$. 16)* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + x$ este strict crescătoare şi bijectivă. Din relaţia $g(f(x)) \geq x$ rezultă $f(x) \geq g^{-1}(x)$ şi deci $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^2 g^{-1}(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{4}$, unde în ultima integrală se pune $x = g(t)$, $t \in [0, 1]$.

pag. 189. 1. 1) e; 2) c; **3.** $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x' f(x)\mathrm{d}x = 2 + \ln 4 - \pi$; **4.** $I_{n+1} = \int_0^1 x'(1-x^2)^{n+1}\mathrm{d}x = -2(n+1)I_{n+1} + 2(n+1)I_n$; $0 < I_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; 0; **5.** $\int_0^x (-e^{-t})' P(t)\mathrm{d}t$ se calculează prin părţi; **6.** $I_n = e - nI_{n-1}$; 0 **7.** a) $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 1$, $n = -2$, $p = 2$; b) $I(a) = (-2a^2 + 7a - 7)e^a + 7$; 7; **8.** a) d; b) a; **9.** a) Se integrează de două ori prin părţi; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $g'(x) = \frac{e^{\mathrm{arctg}\,x}}{x^2+1}$; $\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1}{2}$; b) $\frac{3}{2}$; **10.** a) $2(x^2+5x+4)e^{2x}$; b) $x = -4$ punct de maxim, $x = -1$ punct de minim; c) $\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 1)e^{2x} + C$; **11.** $I_1 = \frac{98}{3}$, $I_2 = \frac{\pi^2}{4}$; **12.** 1) $x = -2$, $y = 0$ a.o. la $-\infty$; 2) $F'(x) = f(x)$, $\forall x < -2 \Rightarrow a = 1$, $b = -1$; c) $\frac{8e - 5}{2e^4}$; **13.** 1) $I_n \geq I_{n+1}$, $0 \leq I_n \leq 1$; 2) $I_n = e - nI_{n-1}$; c) 0; **14.** $I_n = \int_0^1 (1 - x^p)^{n-1}(1 - x^p)\mathrm{d}x = I_{n-1} - \int_0^1 x^p(1 - x^p)^{n-1}\mathrm{d}x = I_{n-1} - \frac{1}{np}\int_0^1 xnpx^{p-1}(1 - x^p)^{n-1}\mathrm{d}x = I_{n-1} + \frac{1}{np}\int_0^1 x((1 - x^p)^n)'\mathrm{d}x =$

$I_{n-1} - \frac{1}{np} I_n$; $I_{n-1} = \frac{np+1}{np} I_n$; **15.** 1) $m = 1$ $(x = 2)$, $p = 1$ $(x = 0)$, $S = 2$; 2) $I = \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{1} \frac{4 - x^2}{x^2 + 1} dx = \frac{15\pi - 8}{12}$; c); **16.** 1) c); 2) a); **17.** c); **18.** $\frac{\pi}{8} \ln 2$; **19.** $f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$; a); **20.** d); **21.** 1) $F(x) = \frac{x^2}{2} + k$, $x \leq 1$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} + k - \frac{1}{6}$, $x > 1$; 2) $e^{-x} \leq 1$, $e^x \geq 1$, $x \in [0, 1]$. Deci $I = \int_0^1 \frac{2e^{-x}}{e^{2x} + 1} dx = 2\left(1 - \frac{1}{e} + \frac{\pi}{4} - \text{arctg}e\right)$.

pag. 192. Testul 1. 1. a) $(2^x - 1)(3^x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$; b) $x_1 = 0 \neq x_2 = 1$ şi $f(0) = f(1) = 1$; **2.** a) $(-2, 1)$; b) $(-9, -3)$, **3.** $f(1) = 3$, $m = f'(1) = 1 \Rightarrow a = -1$, $b = 3 \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 3$; **II. 1.** a) $f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x}$, $f''(x) = (x^2 - 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1)e^{-x}$, $f'''(x) = (-x^2 + 2 \cdot 3x - 3 \cdot 2)e^{-x}$, $f^{(n)}(x) = [(-1)^n x^2 - 2 \cdot nx + n(n-1)]e^{-x}$; b) 2; c) $0 < x^n(1 + e^{-x}) < 1 + e^{-x} \leq 2$, $(a_n) \searrow 0$; **2.** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $27 \ln 3 + 1$; **3.** a) $B = 2I_2$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $B \cdot C = 2C = CB$, $B^n = I_2$, $C^n = 2^{n-1}C$; c) $\det(A) = 8i$; d) Dacă ar exista $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $A^n = I_2$, atunci $\det(A) = \pm 1$; **III. 1.** a) $M(\frac{3}{2}, 2)$ mijlocul lui $[AB]$; ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$: $2x + 4y - 11 = 0$; $C(\frac{4}{3}, \frac{25}{12})$; b) $2x + 4y - 11 = 0$; **2.** a) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$; b) $O = G$ în relaţia de la a); **3.** $l = -6$, $c = \frac{3}{2}$; **IV. 1.** $a = 5$, $b = -1$; **2.** b) Se rezolvă sistemul $y = \sqrt{6 - x}$, $y = x$; $(2, 2)$; c) Se demonstrează inductiv că $x_0 < x_{2n} < x_{2n+2} < 2 < x_{2n+3} < x_{2n+1} < x_1$, $\forall n \geq 1$; d) Inducţie matematică; $0 \leq |y_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n}|y_1|$; $y_n \to 0 \Rightarrow x_n \to 2$; e) $F'(x) = f(x)$, $\forall x \leq 6 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$, $c = -\frac{48}{5}$; g) $x_1 = 5$, $x_2 = 6$; g) f strict descrescătoare pe $[2, 5] \Rightarrow f(2) \geq f(x) \geq f(5)$ şi de aici $2 = (f \circ f)(2) \leq (f \circ f)(x) \leq (f \circ f)(5) = \sqrt{5}$, care se integrează pe $[2, 5]$. **Testul 2. I. 1.** a) Ecuaţie reciprocă; $x + \frac{1}{x} = y$ şi ecuaţia devine $y^2 + 2y + a - 2 = 0$; $(-\infty, -6]$; b) $3^x = y > 0$ şi inecuaţia devine $ay^2 + 4(a-1)y + a - 1 > 0$, $\forall y > 0$; $(1, \infty)$; **2.** a) Fie

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x-x-1$. Din ipoteză $f(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, iar $f(0)=0\Rightarrow x_0=0$ punct de minim pentru f. Aplicând teorema lui Fermat $\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow \ln a-1=0\Rightarrow a=e$; b) Se scrie f sub forma $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$. Pentru semnul numărătorului lui f' se ia $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\ln x$ cu $g'(x)>0$, $\forall x>1$. Deci g este strict crescătoare şi deci $g(x)<g(x+1)$, $\forall x>1$. În final $f'(x)<0$. Din $2<4\Rightarrow f(2)>f(4)$; **3.** a) (1^∞) 1; b) $t=\dfrac{1}{x}\to 0$; $\sqrt{e}$; **II. 1.** $a_1=1$, $r=2$; $S_{50}=2500$; **2.** a) $\ln\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{2}+C$; b) 10; **3.** Se scade coloana întâi din celelalte şi se dă factor comun pe aceste coloane $b-a$ şi respectiv $c-a$; în determinantul astfel obţinut se scade coloana a doua din a treia obţinând factor comun $c-b$; **III. 1.** $(x-2)^2+(y-4)^2-10=0$; **2.** a) Aria paralelogramului este modulul produsului vectorial $|\vec{a}\times\vec{b}|$; $5\sqrt{3}$; b) $V=h\cdot S_{(\vec{b},\vec{c})}$, unde $V=\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&2&1\\0&-1&2\end{vmatrix}=6$ şi $S_{(\vec{b},\vec{c})}=|\vec{b}\times\vec{c}|=\sqrt{70}$; $\dfrac{6}{\sqrt{70}}$; **3.** $(3,-2,4)$; se rezolvă sistemul format din ecuaţia dreptei date şi ecuaţia planului dus prin A perpendicular pe această dreaptă. Vectorul director al dreptei $\overline{v}=(3,5,2)$ este vector normal al planului căutat. **IV. 2.** b) Dacă (x_0,y_0) este soluţie a sistemului şi dacă $x_0>0$ (<0), atunci $y_0>0$ (<0). În plus şi $(-x_0,-y_0)$ este soluţie a sistemului; $(1,1)$, $(-1,-1)$; c) $a_n\searrow 1$; d) $1\leq f(x)\leq\dfrac{5}{4}$ care se integrează pe $[1,2]$; e) 1) (∞^0); 1; 2) $\dfrac{1}{4}$. **Testul 3. 1.** a) 0; b) $(X-\sqrt{2})(X^2+\sqrt{2}X-1)$; $\sqrt{2}$; $\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$; c) 18; **2.** a) $f'(x)=\dfrac{(x-1)\sin x+(x+1)\cos x}{x^2}$; b) $y=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}(x-\dfrac{\pi}{4})$; c) $|\sin x-\cos x|\leq\sqrt{2}\Rightarrow|f(x)|\leq\dfrac{\sqrt{2}}{x}$; 0; **3.** a) $f(x)=\dfrac{x^2-1+2}{x+1}=\dfrac{x^2-1}{x+1}+\dfrac{2}{x+1}=x-1+\dfrac{2}{x+1}$; b) $\dfrac{x^2}{2}-x+2\ln(x+1)+C$; c) $\dfrac{e^2-4e+7}{2}$; **II. 1.** $a=6$, $b=3$, $c=1$; **2.** a) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A^3=0_3$; b) $B=\begin{pmatrix}6&0&-9\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}$; c) 216; **III. 1.** a) $C(5,4)$, $R=5$; b) $(9-5)^2+(7-4)^2=25$, adevărat; c) $(x-5)(9-5)+(y-4)(7-4)=25$; **2.** $2x-3y+4z-1=0$; **IV. 1.**

a) $2\ln 2 - 1$; b) Se ia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \ln(1+t) - t$ pentru care $f'(t) < 0 \Rightarrow f$ strict descrescătoare. Din $t \geq 0 \Rightarrow f(t) \leq f(0) = 0$; c) $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$, iar de aici prin integrare pe $[0,1] \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$; d) 0, via c); **2.** $a = \frac{1}{5}$.

pag. 200. 1) a) $f(\xi) = \frac{1}{e-1}$, $\xi = e^{\frac{1}{e-1}}$; b) $f(\xi) = \frac{1}{3}$, $\xi = \frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $f(\xi) = \frac{\pi}{4}$. **2)** Se scrie relaţia din ipoteză sub forma

$$\int_0^1 \left[f(x) - \frac{1}{1+x^2} \right] dx = 0$$ şi se aplică formula de medie.

3) a) Se utilizează inegalităţile: $\frac{1}{(1+x)^5} < \frac{1}{1+x^5} < \frac{1}{x^5}$. b) Din formula de medie există $\xi_n \in [n, n+1]$ astfel încât $\int_n^{n+1} \frac{x^7}{1+x^{10}} dx = \frac{\xi_n^7}{1+\xi_n^{10}}$. Acum $\frac{n^{10}}{1+(n+1)^{10}} \leq n^3 \int_n^{n+1} \frac{x^7}{1+x^{10}} dx < \frac{n^3(1+n)^7}{1+n^{10}}$.

4) 1) Utilizăm formula de medie (variantă) şi avem:

$\int_0^{\frac{1}{2}} x^a 2^x dx = \xi 2^\xi \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} dx$, unde $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Cum funcţia $g(t) = t2^t$, $t \geq 0$ este strict crescătoare rezultă $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Deci $\xi 2^\xi \leq \frac{1}{2} 2^{\frac{1}{2}} < 1$ şi prin urmare $n_1 < n_2$.

2) Avem: $\int_1^e e^x \ln x \ln^2 x dx = e^\xi \ln \xi \int_1^e \ln^2 x dx$, unde $\xi \in [1, e]$.

Dar $0 \leq e^\xi \ln \xi \leq e^\xi < e^3 < 3^3 = 27$, pentru $\xi \in [1, e]$ şi deci $\frac{1}{27} e^\xi \ln \xi < 1$, ceea ce arată că $n_1 < n_2$.

Observaţie. Aceste probleme pot fi rezolvate după tehnica bine cunoscută de a compara funcţiile de sub semnul integrală. Se arată că 1) $x^a 2^x < x^{a-1}$; 2) $e^x \ln^3 x < 27 \ln^2 x$.

5) Conform formulei de medie, există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a) f(c) < 0.$$

Cum $f(a) > 0$ şi $f(c) < 0$, f continuă, se deduce (f are proprietatea lui Darboux) că există $\xi \in (a, c)$ astfel ca $f(\xi) = 0$.

6) Se scrie integrala sub forma: $\int_0^1 (f(x) - x^2) dx = 0$

şi se aplică formula de medie, adică există $\xi \in [0,1]$ astfel ca $\int_0^1 (f(x) - x^2)\mathrm{d}x = f(\xi) - \xi^2 = 0$.

7) Se scrie relaţia din ipoteză sub forma

$\int_0^1 \left[\sin f(x) - \frac{1}{1+x^2}\right] \mathrm{d}x = 0$ şi se aplică formula de medie.

8) Avem: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1}$, (1).

Aplicând teorema de medie, există $c \in [0,1]$ astfel încât

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(c), \quad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă concluzia.

9) Avem: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (x-1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\mathrm{d}x$. Cu ajutorul teoremei de medie, există $\xi \in [0,1]$ astfel ca

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0) - f'(\xi)\int_0^1 (x-1)\mathrm{d}x.$$

10) Intervalul $[a,b]$ se împarte în $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ intervale egale. Avem: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+x_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+x_0}^{a+3x_0} + \int_{a+3x_0}^{a+6x_0} f(x)\mathrm{d}x +$ $+\ldots+\int_{a+\frac{(n-1)nx_0}{2}}^{b} f(x)\mathrm{d}x$. Am scris integrala dată ca o sumă de integrale definite pe intervale de lungime $1\cdot x_0, 2\cdot x_0, \cdots, n\cdot x_0$, iar acum se aplică formula de medie pentru fiecare din aceste integrale.

11) Se consideră $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x - \frac{t-a}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, funcţie derivabilă cu $g'(t) = f(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(t) - f(c)$, unde $c \in [a,b]$ obţinut din teorema de medie. Cum f este crescătoare şi dacă $t \in [a,c]$, atunci $t(t) \le f(c)$, adică $g'(t) \le 0$, iar dacă $t \in [c,b]$, atunci $f(t) \ge f(c)$ ceea ce dă $g'(t) \ge 0$. De aici $x = c$ este punct de minim pentru g. Cum $g(a) = g(b) = 0$ avem $g(t) \le 0$, $\forall t \in [a,b]$.

12) Pentru prima inegalitate se consideră funcţia $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ şi se arată că $h'(x) \le 0$.

13) 1) Avem: $a_n = \int_0^1 f(2n+x)\mathrm{d}x = \int_{2n}^{2n+1} f(t)\mathrm{d}t$,

$b_n = \int_0^1 f(2n+1+x)\mathrm{d}x = \int_{2n+1}^{2n+2} f(t)\mathrm{d}t$. Formula de medie aplicată pentru a_n şi b_n dă existenţa numerelor $\alpha_n \in [2n, 2n+1]$ şi $\beta_n \in [2n+1, 2n+2]$ pentru care $a_n = f(\alpha_n)$, $b_n = f(\beta_n)$. Cum $\alpha_n, \beta_n \to \infty$, iar $f(\alpha_n) \to a$ şi $f(\beta_n) \to b$, $a \neq b$ se deduce că nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2) Avem $\int_0^1 f(2nx+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\int_1^{2n+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n}\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t =$

$= \frac{1}{2n}(b_0+a_1+b_1+\ldots+b_{n-1}+a_n) = \frac{1}{2}\left[\frac{b_0+\ldots+b_{n-1}}{n} + \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right] \to$

$\to \frac{a+b}{2}$.

Altfel. Cum f este continuă ea admite o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Deci $a_n = F(2n+1) - F(2n)$, $b_n = F(2n+2) - F(2n+1)$.
Acum $c_n = nt_0^1 f(2nx+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}[F(2n+1) - F(1)]$. Pentru limita $\lim\limits_n c_n$ se aplică Stolz-Cesaro: $\lim\limits_n c_n = \lim\limits_n \frac{F(2n+3) - F(2n+1)}{2} =$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_n [F(2n+3) - F(2n+2) + F(2n+2) - F(2n+1)] = \frac{1}{2}(a+b)$.

III. TEOREMA FUNDAMENTALĂ (facultativ)

"Quand Gauss dit qu'il a démontré quelque chose, cela me paraît très probable, quand Cauchy le dit, il y a autant à parier pour et contre, quand Dirichlet le dit, cela est certain". (C. Jacobi)

Scopul acestui capitol este de a lega cele două puncte de vedere asupra integrării prezentate.
Primul capitol are la bază derivarea funcţiilor (F este o primitivă a lui f pe intervalul I dacă $F' = f$) în timp ce 1.2. se bazează pe probleme de arii.
Teorema din acest capitol subliniază că problemele de arii sunt legate de cele de tangenţă (explicaţia acestei legături nu provine din raţiuni geometrice ci din consideraţii funcţionale).
În acelaşi timp, teorema arată că orice funcţie continuă pe un interval închis şi mărginit, admite primitive.

Teorema (de existenţă a primitivelor unei funcţii continue). Dacă $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci funcţia $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, $x \in [a, b]$ are proprietăţile:

1) G este continuă pe $[a, b]$, $G(a) = 0$;

2) G este derivabilă pe $[a, b]$, $G(a) = 0$ şi $G'(x) = g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$ (G este o **primitivă** a lui g pe $[a, b]$, care se anulează în $x = a$).

3) $\int_a^b g(t)dt = G(b) - G(a)$ unde G este o primitivă oarecare pentru g (Formula Leibniz - Newton).

Demonstraţie. Începem demonstraţia prin a observa că dacă g are graficul din figura 5, atunci graficul lui G pe acelaşi interval are forma din figura 6.

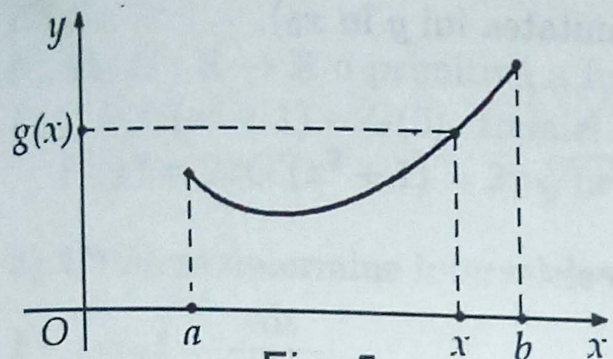


Fig. 5

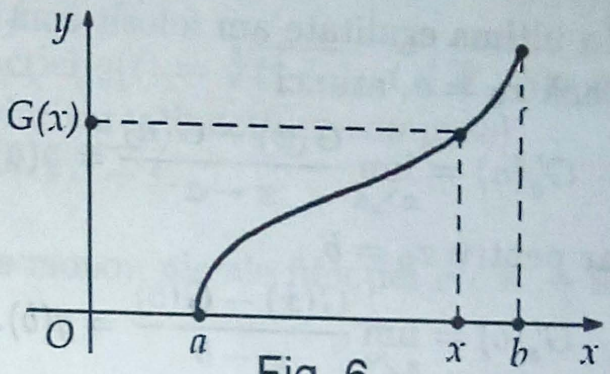


Fig. 6

1) Funcţia G este continuă în $x_0 \in [a,b] \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} G(x_0+h) = G(x_0)$.

Dar

$$G(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} g(t)dt = \int_a^{x_0} g(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} g(t)dt =$$

$$= G(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} g(t)dt, \qquad (1).$$

Deoarece g este continuă pe $[a,b]$, g este mărginită şi deci există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \le g(x) \le M$, $\forall\, x \in [a,b]$. De aici prin integrare pe $[x_0, x_0+h]$ rezultă

$$mh \le \int_{x_0}^{x_0+h} g(t)dt \le Mh.$$

Trecând aici la limită după $h \longrightarrow 0$ se obţine

$$\lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} g(t)dt = 0, \qquad (2).$$

În (1) luând limită după $h \longrightarrow 0$ şi ţinând seama de (2) se găseşte

$$\lim_{h\to 0} G(x_0+h) = G(x_0),$$

ceea ce arată că G este continuă într-un punct arbitrar $x_0 \in [a,b]$. Deci G este continuă pe $[a,b]$.

2) Fie $x_0 \in (a,b)$ şi $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$. Atunci

$$G(x) - G(x_0) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} g(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Pentru ultima integrală se aplică formula de medie şi rezultă $\int\limits_{x_0}^x g(t)\mathrm{d}t =$ $= g(\xi_x)(x-x_0)$, unde $\xi_x \in [x, x_0]$ dacă $x < x_0$ sau $\xi_x \in [x_0, x]$ dacă $x_0 < x$.

Deci $G(x) - G(x_0) = g(\xi_x)(x-x_0)$; iar de aici $\dfrac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} = g(\xi_x)$ şi

$$G'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} g(\xi_x) = g(x_0).$$

(În ultima egalitate am folosit continuitatea lui g în x_0).
Dacă $x_0 = a$, atunci

$$G'_d(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{G(x) - G(a)}{x - a} = g(a),$$

iar pentru $x_0 = b$,

$$G'_s(b) = \lim_{x \nearrow b} \frac{G(x) - G(b)}{x - b} = g(b).$$

Deci G este derivabilă pe $[a, b]$ şi $G' = g$, ceea ce arată că G este o primitivă a lui g pe $[a, b]$ şi în plus $G(a) = 0$.

Observaţie. Evident 2) $\Rightarrow$ 1) (Orice funcţie derivabilă pe o mulţime este continuă pe acea mulţime).

3) Să observăm că funcţiile $x \longrightarrow \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, $G(x)$ (G este o primitivă a lui g, care nu se anulează neapărat în $x = a$) sunt primitive ale lui g pe $[a, b]$. Deci ele diferă printr-o constantă, adică există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t = G(x) + k.$$

Punând aici $x = a$ rezultă $k = -G(a)$, iar pentru $x = b$ găsim

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a). \blacksquare$$

Observaţii. 1) Acest punct al teoremei ne arată cum se poate calcula integrala definită a unei funcţii continue g pe $[a, b]$, dacă se cunoaşte o primitivă G a lui g.2) Dacă $g \geq 0$, atunci $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ este aria subgraficului funcţiei g.

Probleme rezolvate

1) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t^2 + 1}\mathrm{d}t$. Să se calculeze $F'(0)$, $F'(\pi)$, $F'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

R. Funcţia $g(t) = \frac{\sin t}{t^2 + 1}$, $t \in \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi deci admite primitive aici. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o astfel de primitivă. Atunci conform formulei Leibniz-Newton $F(x) = G(x) - G(0)$, iar de aici $F'(x) = G'(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$. Acum găsim uşor că $F'(0) = 0$, $F'(\pi) = 0$, $F'(-\frac{\pi}{2}) = \frac{-4}{4 + \pi^2}$. $\square$

2) Se consideră $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^2+1} \sqrt[3]{t^4 + 1}\mathrm{d}t$. Să se calculeze

$F'(x)$.

R. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $g(t) = \sqrt[3]{t^4+1}$, $t \in \mathbb{R}$. Atunci $F(x) = G(x^2+1) - G(0)$. De aici (derivarea funcţiilor compuse)

$F'(x) = 2xG'(x^2+1) = 2x\sqrt[3]{(x^2+1)^4+1}$. □

3) 1^o) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{x^4} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}.$$

2^0) Să se arate că $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t \geq 0$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$.

R. 1^0) Semnul lui F' pe intervale dă monotonia lui F. Pentru a calcula pe F', fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei continue $g(t) = \dfrac{1}{t^4+1}$, $t \in \mathbb{R}$. Deci $F(x) = G(x^4) - G(0)$. De aici avem:

$$F'(x) = 4x^3G'(x^4) = \frac{4x^3}{x^{16}+1}.$$

Dacă $x > 0$, atunci $F' > 0$, ceea ce arată că pe $(0, \infty)$ funcţia F este strict crescătoare, iar dacă $x < 0$, atunci $F' < 0$, adică pe $(-\infty, 0)$ F este strict descrescătoare. □

2^0) Avem $f'(x) = \dfrac{\sin x}{x+1} = 0$ dacă $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$. Din $f'(x) > 0$, $x \in (0, \pi)$ se deduce că aici f este strict crescătoare, iar din $f'(x) < 0$, $x \in (\pi, 2\pi)$ rezultă f strict descrescătoare pe $(\pi, 2\pi)$. Deci $x = \pi$ este punct de maxim. Acum este clar că $f(x) \geq \min\{f(0), f(2\pi)\}$. Avem $f(0) = 0$ şi $f(2\pi) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t$. În a doua integrală se face $u = t - \pi$ şi

$$f(2\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{1+\pi+u}du > \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+1}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{1+u}du = 0.$$

Deci $\min\{f(0), f(2\pi)\} = 0$ şi $f(x) \geq 0, \forall\, x \in [0, 2\pi]$.

4) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}(t^2-2)\mathrm{d}t.$$

R. Punctele de extrem sunt puncte în care derivata se anulează şi îşi schimbă semnul. Găsim $F'(x) = e^{x^2}(x^2-2) = 0$ dacă $x = \pm\sqrt{2}$. Pentru $x = -\sqrt{2}$ avem punct de maxim, iar pentru $x = \sqrt{2}$ avem punct de minim. □

5) Se consideră $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \mathrm{arctg}^2 t\mathrm{d}t$. Să se calculeze $F''(2)$.

R. Funcţia $g(t) = \text{arctg}^2 t$ fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o astfel de primitivă. Atunci $F(x) = G(x) - G(1)$, iar de aici $F'(x) = G'(x) = \text{arctg}^2 x$ şi $F''(x) = \dfrac{2\text{arctg}x}{1+x^2}$.

Aşadar $F''(2) = \dfrac{2}{5}\text{arctg}2$. □

6) Fie $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)^2 \sin t dt$. Se cere $F''(t)$.

R. Avem: $F(x) = x^2 \displaystyle\int_0^x \sin t dt - 2x \int_0^x t \sin t dt + \int_0^x t^2 \sin t dt$ şi de aici $F'(x) = 2x \displaystyle\int_0^x \sin t dt - 2 \int_0^x t \sin t dt$ şi $F''(x) = 2(1 - \cos x)$. □

7) Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^1 \arcsin x dx$.

R. Am căutat la punctul e) să aplicăm integrarea prin părţi pentru $f(x) = \arcsin x$, $g'(x) = 1$, dar am văzut că funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$ nu este derivabilă în $x = 1$. Pentru a aplica metoda integrării prin părţi se consideră $\varepsilon \in (0,1)$ şi se calculează $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^\varepsilon \arcsin x dx$ funcţie continuă de ε (teorema fundamentală) când avem că $I = \lim\limits_{\varepsilon \to 1} I(\varepsilon) = \dfrac{\pi}{2} - 1$. □

8) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continuă şi $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = (b-a) \displaystyle\int_a^x f(t)dt - (x-a) \int_a^b f(t)dt$. Să se calculeze $F'(x)$ şi folosind teorema lui Rolle să se deducă teorema de medie pentru integrale.

R. Avem: $F'(x) = (b-a)f(x) - \displaystyle\int_a^b f(t)dt$. Evident F este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi $F(a) = F(b)$ $(= 0)$. Deci există $\xi \in (a,b)$ astfel încât $F'(\xi) = 0$, adică $(b-a)f(\xi) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$. □

9)* a) Să se determine $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ derivabilă, dacă

$$x + \int_0^x f(t)dt = (x+1)f(x), \forall x > 0.$$

b) Se cere funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\int_1^x f(\ln t)dt = x^2 \ln x, \forall x > 0.$$

R. a) Se derivează relaţia în raport cu x şi rezultă $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, iar

de aici $f(x) = \ln(x+1) + c$. Înlocuind în relaţia din enunţ găsim $c = 0$. Deci $f(x) = \ln(x+1)$. □

b) Se derivează relaţia din enunţ şi rezultă $f(\ln x) = 2x \ln x + x$, iar aici punând $t = \ln x$ se obţine $f(t) = (2t+1)e^t$. □

10)* Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

R. a) Funcţia $g(t) = \sin t^2$, $t \in \mathbb{R}$ fiind continuă, admite primitive. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o astfel de primitivă. Deci

$$\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t = G(x) - G(0).$$

În calculul limitei se aplică regula lui l'Hospital de două ori şi avem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{G'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x^2}{2} = 0.$$

b) Din formula de medie

$$\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t = xe^{\xi^2},\ \xi \in [0,x] \text{ şi deci } \lim_{x\to\infty} xe^{\xi^2} = \infty.$$

Suntem cu limita în cazul de nedeterminare ∞^0. Se ştie că $f^g = e^{g\ln f}$, unde $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Limita este e (se aplică de mai multe ori regula lui l'Hospital).

11)* Să se arate că: $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{4}$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

R. Dacă se notează prin $G(x)$ membrul stâng, atunci $G'(x) = 0$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ceea ce arată că pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ funcţia G este constantă. Cum $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ rezultă $G(x) = \dfrac{\pi}{4}$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (Am folosit identitatea $\arcsin\sqrt{x} + \arccos\sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2}$, $x \in [0,1]$). □

12)* Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir dat de $a_n = n\int_0^1 x^n f(x^n)\mathrm{d}x$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

R. Se consideră $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Avem $F' = f$.

Deci $a_n = \int_0^1 nx\cdot x^{n-1} f(x^n)\mathrm{d}x = \int_0^1 x(F(x^n))'\mathrm{d}x = xF(x^n)\Big|_0^1 -$

$$-\int_0^1 F(x^n)\mathrm{d}x = F(1) - \int_0^1 F(x^n)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 F(x^n)\mathrm{d}x.$$

Aşadar $a_n - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 F(x^n)\mathrm{d}x$.

Dar $|F(x)| = \left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t \leq Mx$, unde $M = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Prin urmare $|F(x^n)| \leq Mx^n$, $x \in [0,1]$.

Deci $\left|\int_0^1 F(x^n)\mathrm{d}x\right| \leq M\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{M}{n+1} \longrightarrow 0.$

În fine, $\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. □

13) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că există $c \in [a,b]$ astfel încât $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

R. Concluzia problemei poate fi reformulată astfel:

Să se arate că ecuaţia $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ are cel puţin o soluţie în $[a,b]$. Această rescriere ne sugerează să considerăm funcţia continuă $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$, $\forall\, x \in [a,b]$, pentru care

$$G(a)G(b) = -\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq 0.$$

Cum G are proprietatea lui Darboux, deducem existenţa unui punct $c \in [a,b]$ pentru care $G(c) = 0$, adică relaţia dorită. □

14) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă $T > 0$. Să se arate că $\forall\, a \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

R. Se consideră $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$ pentru care $G(x) = F(x+T) - F(x)$, unde F este o primitivă pentru f.

De aici $G'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Deci $G(x) = k$ =constant $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$ avem:

$G(0) = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = k$, adică egalitatea dorită.

15) Se consideră $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă. Să se arate că există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$ sau $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

R. În acest caz se consideră funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$, care verifică cerinţele din teorema lui Rolle.

Prin urmare există $c \in (a,b)$ astfel încât $F'(c) = 0$.

Cum $F'(x) = f(x)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t - f(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ se deduce imediat concluzia.

16)* Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = -f^2(c)$.

R. Funcţiei $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ i se aplică teorema lui Rolle.

17*) 1^0) Să se arate că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, există numerele reale unice $\xi(n)$ şi $\eta(n)$ astfel încât

$$\frac{1}{n}\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\xi(n)} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{\eta(n)}^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

2^0) Să se arate că $\xi(n), \eta(n)\in[0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_n \xi(n)=0$, $\lim\limits_n \eta(n)=1$, unde $\xi(n)$, $\eta(n)$ sunt numerele determinate la 1^0).

3^0) Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} n\xi(n) = \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x,\ \lim_{n\to\infty} n[\eta(n)-1] = -\int_0^1 e^{-x^2+1}\mathrm{d}x.$$

R. 1^0) Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, ecuaţia $\frac{1}{n}\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t - \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$ are o soluţie unică. Notând membrul stâng cu $f(x)$ se pune în evidenţă o funcţie derivabilă cu $f'(x) = -e^{-t^2} < 0$, ceea ce arată că f este strict descrescătoare. Cum $f(0) > 0$ şi $f(1) < 0$, via proprietatea Darboux, se obţine că există $\xi(n)\in(0,1)$ pentru care $f(\xi(n)) = 0$. Din f strict descrescătoare deducem că $\xi(n)$ este unic. Analog pentru $\eta(n)$.

2^0) Notând $m = \min\limits_{x\in[0,1]} e^{-x^2}$, atunci $\frac{1}{n}\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \geq \xi(n)m$.

Deci $0 < \xi(n) \leq \frac{m}{n}\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Trecând aici la limită după n rezultă $\lim\limits_n \xi(n) = 0$.

Altfel. Dacă $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o primitivă pentru $x\to e^{-x^2}$, atunci din 1^0) avem $F(\xi(n)) = \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x + F(0)$, unde prin trecere la limită obţinem $F(\lim\limits_n \xi(n)) = F(0)$. Cum $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ dă F strict crescătoare, adică injectivă, din egalitatea precedentă găsim $\lim\limits_n \xi(n) = 0$.

3^0) Avem: $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x = n\xi(n)\cdot\frac{1}{\xi(n)}\int_0^{\xi(n)} e^{-x^2}\mathrm{d}x$, (1).

Dar $\lim\limits_n \frac{1}{\xi(n)}\int_0^{\xi(n)} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim\limits_n \frac{F(\xi(n))-F(0)}{\xi(n)} = F'(0) = 1.$

Trecând la limită, după n, în (1) rezultă relaţia dorită.

Pentru a demonstra a doua egalitate plecăm de la

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x = n[\eta(n)-1]\frac{\int_{\eta(n)}^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x}{\eta(n)-1} = n[\eta(n)-1]\frac{F(1)-F(\eta(n))}{\eta(n)-1}, \quad (2).$$

Se trece aici la limită după n şi avem:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_n n[\eta(n)-1](-F'(1)) = -\frac{1}{e}\lim_n n[\eta(n)-1].$$

Probleme propuse

1) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_x^{x+1}\frac{t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$, $x\in\mathbb{R}$.

Să se calculeze $F'(0)$, $F'(\pi)$, $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2) Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:

1) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^{\operatorname{arctg}x} e^{\operatorname{tg}^2 t}\mathrm{d}t$;

2) $F:(0,1)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^{\arcsin x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$;

3) $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x}\ln(1+\sin^2 t)\mathrm{d}t$;

4) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^{x^2} e^{t^2}\mathrm{d}t$;

3) Să se determine valorile extreme ale funcţiei $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$, $x\in\mathbb{R}$.

4) Să se studieze derivabilitatea funcţiei $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F(x)=\int_0^{x^2-2x}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$.

5)* Să se arate că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^2\frac{\cos(xt)}{t}\mathrm{d}t$ este strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

6) Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x(t-\alpha)(t-\beta)\mathrm{d}t$, $\alpha,\beta>0$, $\alpha<\beta$.

Să se determine punctele de extrem ale acestei funcţii.

7) Să se calculeze $I = \int_0^2 \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \mathrm{d}x$.

8) Să se demonstreze egalitatea: $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $x > 0$.

9)* Să se arate că $\int_{\frac{1}{e}}^{\mathrm{tg}x} \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\mathrm{ctg}x} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)} = 1$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

10)* Să se arate că (aplicând regula lui l'Hospital):

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\int_0^x \cos u^2 du\right) = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t+10}{t+1}\mathrm{d}t\right) = 10$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2(t+9)}{t+1}\mathrm{d}t\right) = 3$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\int_0^{\cos x} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{\int_0^{\mathrm{ctg}x} e^{t^2}\mathrm{d}t} = 1$.

11)* Se dă funcţia $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Dacă $G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$, atunci să se arate că $0 \le G(x) \le 1$, $\forall x \ge 0$.

12) Să se determine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = x^2 + 2x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

13) Fie $a > 0$ astfel încât $[0,a] \subset I$, I interval deschis, $f, g : I \to \mathbb{R}$ funcţii continue cu proprietăţile:

1) $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a g(x)\mathrm{d}x$; 2) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \le \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$, $\forall x \in I$.

Să se arate că $f(a) = g(a)$.

14) Să se arate că oricare ar fi $\lambda \in (0,1)$ există $c \in [a,b]$ astfel încât $\lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t$, unde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă.

15) Se consideră $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care $f(a) > a$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. Să se arate că există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = c$.

16) Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie continuă. Să se arate că ecuaţia $2x - 1 = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ are o unică soluţie în $[0,1]$.

17) Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue pe $[a,b]$, $g(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in (a,b)$. Să se arate că există $c \in (a,b)$, astfel încât $f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = g(c)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

pag. 224. 1) Avem: $F'(x) = \dfrac{x+1}{1+\sin^2(x+1)} - \dfrac{x}{1+\sin^2 x}$. **2) 1)** $\dfrac{e^{x^2}}{x^2+1}$; 2) $\dfrac{x}{\arcsin x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\dfrac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $2xe^{x^4}$. **3)** Ecuaţia $F'(x) = 0$ conduce la ecuaţia trigonometrică $-\sin x\sqrt{1+\cos^2 x} - \cos x \cdot \sqrt{1+\sin^2 x} = 0$ sau $\operatorname{tg} x = -\sqrt{\dfrac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}}$ sau $\operatorname{tg} x = -\sqrt{\dfrac{1+2\operatorname{tg}^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x}}$, iar de aici $\operatorname{tg} x = -1$ cu soluţiile $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Punctele $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt puncte de minim, iar $x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt puncte de maxim. **4)** Avem: $F(x) = \dfrac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}\Big|_0^{x^2-2x} = \dfrac{2}{3}(x-1)^2|x-1| - \dfrac{2}{3}$. Funcţia F este derivabilă pe $\mathbb{R}$. **5)*** Avem: $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos y}{y}\mathrm{d}y$. Funcţia $y \to \dfrac{\cos y}{y}$, $y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ fiind continuă are primitive. Fie G o primitivă. Atunci $F(x) = G(2x) - G(x)$ şi deci

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{\cos 2x - \cos x}{x} = \frac{-2\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2}}{x} < 0.$$

Altfel. Se iau $0 < x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{4}$ şi se calculează $F(x_2) - F(x_1)$.
6) Avem: $F'(x) = (x-\alpha)(x-\beta) = 0$ dă $x = \alpha$, $x = \beta$. Cum $F''(\alpha) < 0$ rezultă $x = \alpha$ este punct de maxim, iar $F''(\beta) > 0$ implică $x = \beta$ este punct de minim. **7)** Funcţia $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ nu este derivabilă în $x = 1$. $I = \lim\limits_{\varepsilon \nearrow 1} \displaystyle\int_0^{\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon \searrow 1} \int_{\varepsilon}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ via teorema fundamentală. **Altfel.** Se determină o primitivă F a lui f pe $[0,2]$ şi se aplică formula Leibniz - Newton.
8) Fie $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $x > 0$, $G(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $x > 0$. Se constată că $F'(x) = G'(x)$. Deci $F(x) - G(x) = k$, $\forall x > 0$. Pentru $x = 1$ rezultă $k = 0$. Deci $F(x) = G(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$. **Altfel.** Se face schimbarea de variabilă $t = \dfrac{1}{y}$.
9) Se notează membrul stâng cu $G(x)$. Se constată că $G'(x) = 0$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ceea ce arată că $G(x) = k$, $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Se calculează $G\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ şi avem:

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left[\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{t(1+t^2)}\right]\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} = 1.$$

Deci $k = 1$.
11)* Funcţia g este continuă la dreapta în $x = 0$. Se ştie că $e^x > x+1$, $\forall x \neq 0$. Deci $e^{-x} > -x+1$ şi de aici $\dfrac{1-e^{-x}}{x} < 1$ sau $0 \leq \dfrac{e^{-x}(1-e^{-x})}{x} < e^{-x}$, $x > 0$. De aici prin integrare rezultă inegalitatea dorită. **12)** Pentru $x = a$ rezultă

$0 = a^2 + 2a + 1$, când $a = -1$. Acum dacă F este o primitivă a lui f, egalitatea devine $F(x) - F(a) = x^2 + 2x + 1$, care prin derivare dă $f(x) = 2x + 2$. **13)** Se ia $h : I \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$ şi $H : I \to \mathbb{R}$, $H(x) = \int_0^x h(t)\mathrm{d}t$. Din 1) şi 2) rezultă $x = a$ punct de minim pentru H. Deci $H'(a) = 0$, adică $f(a) = g(a)$. **14)** Se consideră funcţia $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Din $G(a)G(b) = -\lambda(1 - \lambda)\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq 0$ şi G are proprietatea lui Darboux se deduce că există $c \in [a, b]$ astfel încât $G(c) = 0$. **15)** Se consideră $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$,. $x \in [a, b]$. Avem $g(a) > 0$ şi $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x < 0$ $\left(\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\right)$. Dacă $g(x) > 0$, $\forall\, x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$, fals. Deci există $a' \in (a, b]$ astfel încât $g(a') < 0$. Cum g este continuă are proprietatea lui Darboux şi deci există $c \in (a, a') \subset (a, b)$ astfel încât $g(c) = 0$. **16)** Ecuaţia considerată sugerează alegerea funcţiei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 2x + 1$, care este derivabilă şi în plus $g'(x) = f(x) - 2 < 0$, $\forall\, x \in [0, 1]$. Cum $g(0) = 1 > 0$, $g(1) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - 1 \leq 0$ $(0 \leq f(t) \leq 1)$ şi g are proprietatea lui Darboux (fiind continuă) se deduce existenţa punctului $x_0 \in [0, 1]$ astfel ca $g(x_0) = 0$. Din g descrescătoare rezultă x_0 este unic. **17)** Fie $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, $x \in [a, b]$. Funcţiile F, G verifică cerinţele din teorema lui Cauchy şi deci există $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$ sau $g(c)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

IV. APLICAŢII ALE INTEGRALEI DEFINITE

"Bis in die neueste Zeit glaubte man, es sei das Integral einer convergenten Reihe ... gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Glieder, und erst Herr Weierstrass hat bemerkt ..."
(E. Heine, Ueber trig. Reihen, 1870)

4.1. Aplicaţii în geometria plană

Dacă se consideră o curbă în plan (corespunzătoare unei funcţii continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$), atunci se pot pune două probleme de natură geometrică: lungimea acestei curbe şi aria regiunii delimitate de curbă, axa Ox şi dreptele $x = a$, $x = b$.

Deoarece problema definirii riguroase a ariilor mulţimilor plane este o problemă complexă (ce ţine de **teoria măsurii**), ne mărginim la a prezenta suportul intuitiv, care conduce la formula ariei. În acelaşi mod vom trata şi celelalte aplicaţii pe care le vom analiza în continuare.

4.1.1. Schema aplicaţiei integralei definite

În cele ce urmează dorim să prezentăm calea prin care se ajunge la o integrală definită în problemele aplicative.

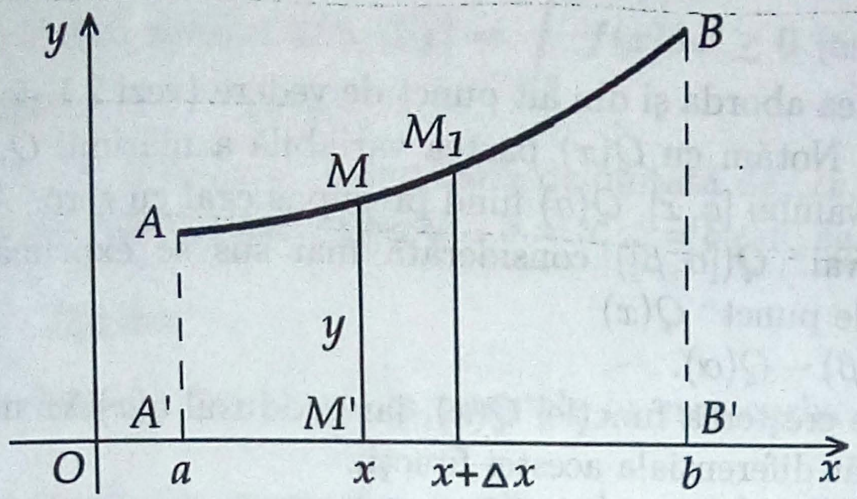
Să ne imaginăm că se cere să se determine o mărime oarecare Q (geometrică, fizică etc.) definită pe intervalul $[a, b]$. În acelaşi timp, să presupunem că intervalului parţial $[\alpha, \beta]$ inclus în $[a, b]$ îi corespunde o parte oarecare din mărimea Q, aşa încât descompunerea intervalului $[a, b]$ în intervale parţiale atrage după sine şi descompunerea mărimii Q în părţi corespunzătoare.

Mai precis este vorba de o funcţie de interval $Q([a, b])$ având „proprietatea de aditivitate", adică dacă intervalul $[\alpha, \beta]$ constă din intervalele parţiale $[\alpha, \gamma]$ şi $[\gamma, \beta]$ atunci

$$Q([\alpha, \beta]) = Q([\alpha, \gamma]) + Q([\gamma, \beta]).$$

Problema constă în calculul valorii sale corespunzătoare întregului interval $[a, b]$.

Ca exemplu să luăm într-un plan curba $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.



Atunci: 1) lungimea l a curbei AB, 2) aria S mărginită de trapezul curbiliniu $AA'B'B$ şi 3) volumul V al corpului obţinut prin rotirea acestui trapez în jurul axei Ox, toate trei sunt mărimi de tipul menţionat.
Să considerăm un „element“ ΔQ, din mărimea Q, corespunzător „intervalului elementar“ $[x, x+\Delta x]$. Vom căuta să găsim pentru ΔQ o expresie aproximativă de forma $q(x)\Delta x$, **liniară în raport cu** Δx, când

$$\Delta Q \sim q(x)\Delta x, \qquad (1)$$

şi $\Delta Q \to 0$ dacă $\Delta x \to 0$.
După ce s-a realizat acest lucru se poate afirma că mărimea Q are exprimarea

$$Q = \int_a^b q(x)\mathrm{d}x, \qquad (2).$$

Pentru a explica acest fapt, se descompune intervalul $[a, b]$ prin punctele $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ în intervalele elementare

$$[a, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, b].$$

Deoarece fiecărui interval $[x_i, x_{i+1}]$ sau $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ îi corespunde o parte elementară a mărimii Q, aproximativ egală cu $q(x_i)\Delta x_i$, atunci întreaga mărime Q cerută se va exprima **aproximativ** prin suma

$$Q \sim \sum_i q(x_i)\Delta x_i.$$

Gradul de precizie a valorii obţinute va fi cu atât mai bun cu cât intervalele parţiale vor fi mai mici, aşa încât Q, va fi limita sumei menţionate, adică se va exprima efectiv prin integrala definită $\int_a^b q(x)\mathrm{d}x$.

Deci, în final, toată problema se reduce la stabilirea egalităţii aproximative (1), din care se obţine direct (2).
De obicei în loc de Δx şi ΔQ se scrie $\mathrm{d}x$ şi respectiv dQ, iar (1) devine

$$dQ = q(x)\mathrm{d}x, \qquad (3).$$

Apoi se „însumează“ aceste „elemente“ (calculând integrala), ceea ce

conduce la (2).

Problema s-ar putea aborda şi din alt punct de vedere (vezi 2.1.-formula Leibniz-Newton). Notăm cu $Q(x)$ partea variabilă a mărimii Q, corespunzătoare intervalului $[a, x]$, $Q(a)$ fiind presupus egal cu zero. Atunci „funcţia de interval“ $Q([\alpha, \beta])$ considerată mai sus se exprimă prin această „funcţie de punct“ $Q(x)$

$$Q([\alpha, \beta]) = Q(\beta) - Q(\alpha).$$

Mărimea ΔQ este creşterea funcţiei $Q(x)$, iar produsul $q(x)\Delta x$ nu este nimic altceva decât diferenţiala acestei funcţii.

Deci egalitatea (3) scrisă în notaţii diferenţiale, de fapt nu este aproximativă, ci precisă, dacă prin dQ se înţelege $dQ(x)$.

De aici se obţine imediat rezultatul căutat.

$$\int_a^b q(x)\mathrm{d}x = Q(b) - Q(a) = Q([a, b]).$$

În aplicaţii este mai uşoară şi mai rodnică ideea însumării elementelor.

4.1.2. Calculul ariilor

Teoremă. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă şi $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, iar $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ (subgraficul lui f, fig. 7.a). Atunci mulţimea Γ_f are arie şi aria $(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Observaţii. 1) În 2.2. am văzut cum se poate aproxima o astfel de arie cu ajutorul ariilor unor dreptunghiuri.

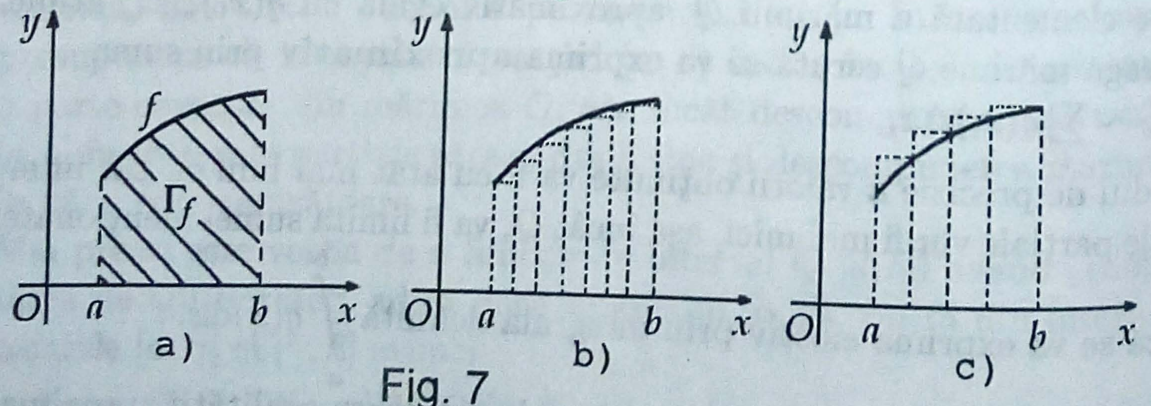


Fig. 7

În fig. 7. b), este ilustrată aproximarea prin lipsă a ariei lui Γ_f, iar în 7. c) este prezentată aproximarea prin adaos a ariei lui Γ_f cu ajutorul ariilor unor dreptunghiuri.

2) Din $f \geq 0$ se deduce că graficul lui f este situat deasupra axei Ox.

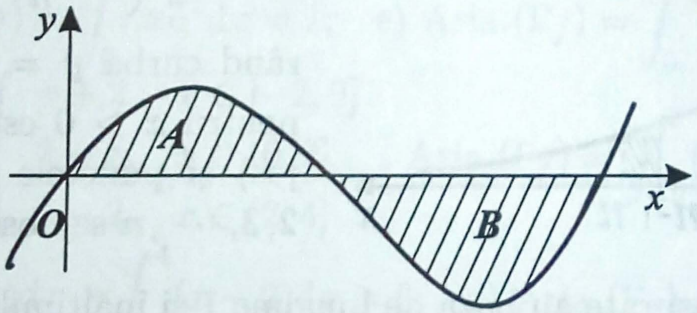
3) Din $f \geq 0$ rezultă aria $(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ (aria este un număr nenegativ).

4) Dacă $f \leq 0$ pe $[a,b]$, atunci aria delimitată de Ox, graficul lui f (situat acum sub axa Ox), dreptele $x = a$, $x = b$ este egală cu

$$-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Deci trebuie să fim atenţi la punctele în care curba intersectează axa Ox.

Pentru clarificare prezentăm următorul exemplu: Să determinăm aria cuprinsă între curba $y = x(x-1)(x-2)$ şi axa Ox. Pentru a determina punctele în care curba taie axa Ox se rezolvă ecuaţia $y = 0$. De aici $x_1 = 0$ $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ (vezi figura de mai jos). Aria cuprinsă între curbă şi axa Ox este suma ariilor suprafeţelor A şi B. Pentru aria lui A avem $\int_0^1 y\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$, iar pentru aria lui B găsim $\int_1^2 y\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$.



Semnul minus pentru B se referă numai la poziţia suprafeţei B faţă de axa Ox. Aria lui B va fi deci $\frac{1}{4}$ unităţi de arie. Prin urmare aria totală cerută este $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

5) Din 3) şi 4) deducem că pentru a calcula aria delimitată de Ox, graficul lui f şi dreptele $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ se utilizează formula

$$\text{Aria } (\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

6) Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt continue şi $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, atunci mulţimea $\Gamma_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ cuprinsă între graficele funcţiilor f, g (fig. 8) şi dreptele $x = a$, $x = b$ are arie şi

$$\text{Aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x.$$

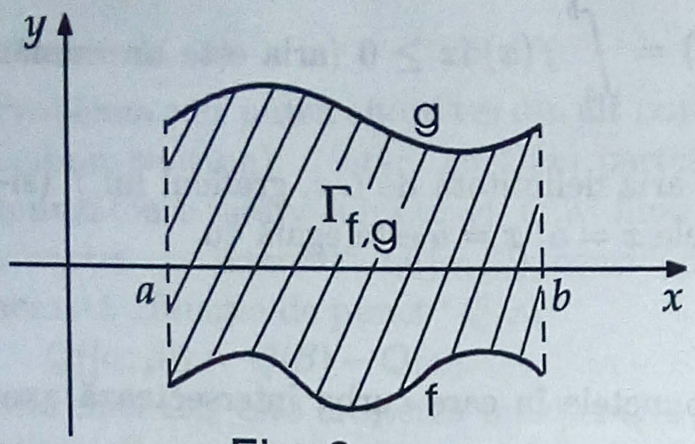
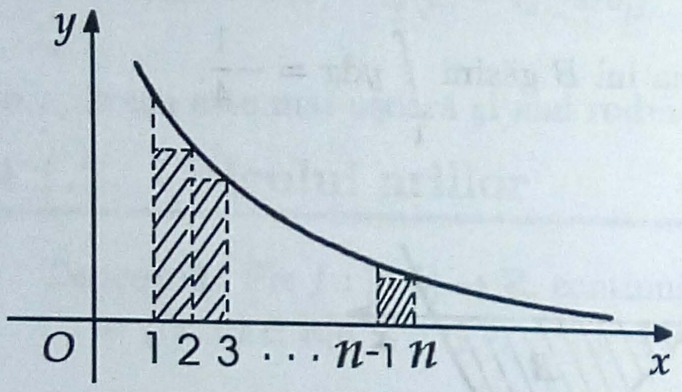


Fig. 8

Observaţie. În general aria $(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$. Pentru a calcula integrala se explicitează modulul $|f-g|$ pe intervalul $[a,b]$.

Exerciţiu ilustrativ

Să se calculeze $I_n = \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi să se deducă inegalitatea: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{3}{2}$.



R. Un calcul simplu arată că $I_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Considerând curba $y = \frac{1}{x^3}$ (graficul pentru $x > 0$ este redat mai jos) şi punctele de diviziune $2, 3, \cdots, n$ se observă că ariile dreptunghiurilor haşurate au baza de lungime 1 şi înălţimile $\frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \ldots, \cdots \frac{1}{n^3}$. Suma ariilor acestor dreptunghiuri este clar mai mică decât aria subgraficului lui f pe $[1,n]$, adică

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \text{ sau (adunând 1 ambilor membri)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{3}{2}.$$

Exemple cunoscute. 1. Arătaţi că aria cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ este egală cu πR^2.

2. Arătaţi că aria elipsei de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ este egală cu πab.

Probleme rezolvate

1) Să se calculeze aria mulţimii Γ_f în cazurile:

a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$; b) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$;

c) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(2x+1)$; d) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$;

e) $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^2 x$;

f) $f:[-2,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-|2-|2-x||$;

g) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; h) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;

i) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

R. a) Aria $(\Gamma_f)=\displaystyle\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{x+1}=x\Big|_0^1-\ln(x+1)\Big|_0^1=1-\ln 2;\square$

b) Aria $(\Gamma_f)=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1);\square$

c) Aria $(\Gamma_f)=\displaystyle\int_0^1\ln(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{2x+1}{2}\left[\ln(2x+1)-1\right]\Big|_0^1=$

$=\dfrac{1}{2}(3\ln 3-2);\square$

d) Aria $(\Gamma_f)=\displaystyle\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x=1$; e) Aria $(\Gamma_f)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4};\square$

f) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\in[-2,0]\\ 2-x, & x\in(0,2]\\ x-2, & x\in(2,4]\end{cases}$, Aria $(\Gamma_f)=\displaystyle\int_{-2}^0(x+2)\mathrm{d}x+$

$+\displaystyle\int_0^2(2-x)\mathrm{d}x+\int_2^4(x-2)\mathrm{d}x=6$; g) Aria $(\Gamma_f)=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=$

$=\dfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$; h) $\dfrac{\pi}{4}$; i) $\ln(1+\sqrt{2})$. $\square$

2) Să se determine aria delimitată de axa Ox şi graficul funcţiei:

a) $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$;

b) $f:[-4,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x+|x^2-4|}{|x-2|}$;

c) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\mathrm{arctg}x$.

R. a) Trebuie observat că pentru $x\in[-1,1]$, $f(x)\le 0$. Deci aria cerută este egală cu $\displaystyle\int_{-2}^{-1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. $\square$

b) Se explicitează modulele şi avem:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{2-x}, & x\in[-4,-2]\\ \dfrac{-x^2+3x+4}{2-x}, & x\in(-2,0].\end{cases}$$

Se constată că $f(x) \leq 0$ dacă $x \in [-4, -1]$ şi prin urmare aria este

$$-\int_{-4}^{-2} \frac{x^2+3x-4}{2-x}\mathrm{d}x - \int_{-2}^{-1} \frac{-x^2+3x+4}{2-x}\mathrm{d}x +$$
$$+\int_{-1}^{0} \frac{-x^2+3x+4}{2-x}\mathrm{d}x = 5 + 6\ln\frac{3}{4}. \square$$

c) Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia $x = 0 \in [-1, 1]$. Dacă $x \in [-1, 0)$, atunci $f(x) \geq 0$, iar pentru $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq 0$. Deci aria cerută este egală cu

$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \pi - 1 - \ln 4. \square$$

3) Să se calculeze aria mulţimii $\Gamma_{f,g}$:

a) $f(x) = -\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 4]$;
b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$;
c) $f(x) = -1 + \sqrt{2 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

R. a) În fig. 9 avem graficele funcţiilor f, g. Ni se cere aria figurii haşurate. Avem:

$$\text{Aria } (\Gamma_{f,g}) = \int_0^4 (\sqrt{x} + \sqrt{x})\mathrm{d}x = 2\int_0^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}. \square$$

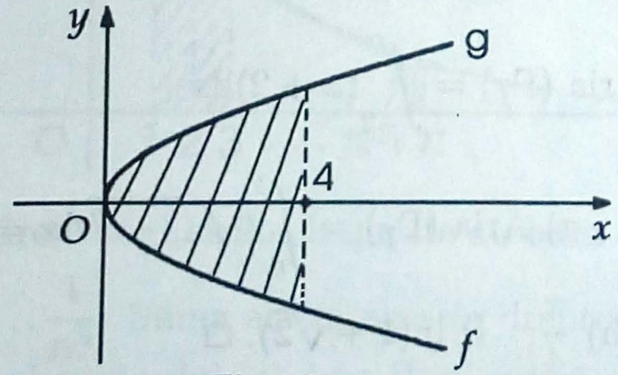


Fig. 9

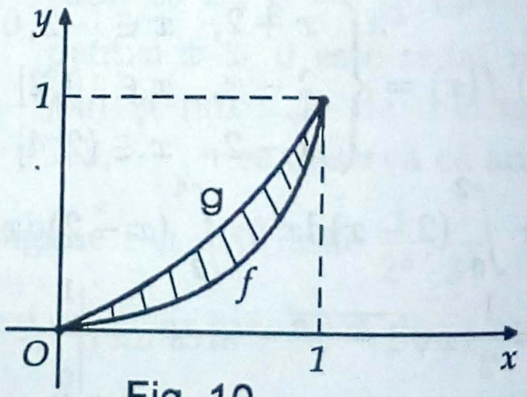


Fig. 10

b) Graficele celor două funcţii sunt date în fig. 10. Aria figurii haşurate este

$$\text{Aria } (\Gamma_{f,g}) = \int_0^1 (x^2 - x^3)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}. \square$$

Observaţie. Aria $(\Gamma_{f,g}) = \int_0^1 |x^2 - x^3|\mathrm{d}x$, iar

$$|x^2 - x^3| = \begin{cases} x^2 - x^3, \text{ dacă } x^2 - x^3 \geq 0,\ x^2(1-x) \geq 0 \\ x^3 - x^2, \text{ dacă } x^2 - x^3 < 0,\ x^2(1-x) < 0. \end{cases}$$

Cum $x^2(1-x) \geq 0$ implică $x \leq 1$, deducem că $|x^2 - x^3| = x^2 - x^3$ pentru $x \in [0, 1]$.

Altfel. Se determină punctele de intersecţie ale curbelor $y = x^2$, $y = x^3$,

prin rezolvarea acestui sistem şi găsim punctele $O(0,0)$, $A(1,1)$. Apoi pentru $x = \frac{1}{2} \in [0,1]$, avem $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} < g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. De aici deducem că $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [0,1]$ şi deci aria $(\Gamma_{f,g}) = \int_0^1 (x^2 - x^3)\mathrm{d}x$.

c) Din $y = -1+\sqrt{2-x^2}$ rezultă $y+1 = \sqrt{2-x^2}$, iar de aici prin ridicare la pătrat $(y+1)^2 = 2 - x^2$ sau $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$, care este ecuaţia unui cerc cu centrul în $C(0,-1) \in Oy$ şi de rază $r = \sqrt{2}$.

De asemenea, $y = \sqrt{1-x^2}$ dă $x^2 + y^2 - 1 = 0$, care este ecuaţia cercului unitate. Primul cerc împarte cercul unitate în două porţiuni. Ni se cere aria porţiunii haşurate (fig. 11) pentru care $g \geq f$. Deci graficele celor două funcţii sunt arce din cele două cercuri. Zona haşurată se numeşte **lunula lui Hipocrat**. Aria $(\Gamma_{f,g}) = \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2} + 1 - \sqrt{2-x^2})\mathrm{d}x = 1$.

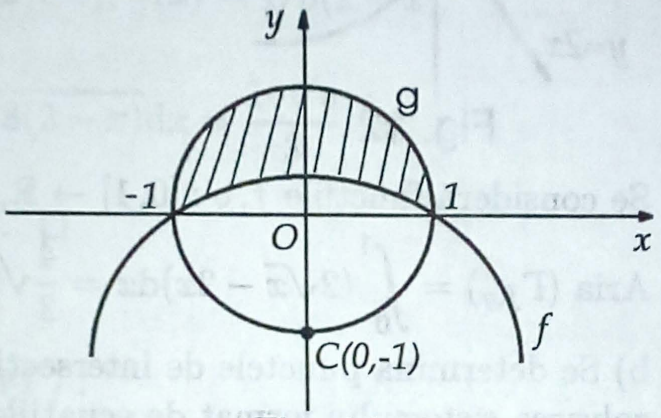


Fig. 11

Aria porţiunii (nehaşurată) cuprinse între cele două cercuri este egală cu aria cercului unitate π, din care se scade aria porţiunii haşurate. Avem: $\pi - 1$.

Altfel. Din condiţiile $2 - x^2 \geq 0$, $1 - x^2 \geq 0$ rezultă $x \in [-1,1]$. Se determină punctele de intersecţie ale curbelor $y = -1 + \sqrt{2-x^2}$, $y = \sqrt{1-x^2}$ prin rezolvarea acestui sistem. Egalăm membrii drepţi şi se obţine ecuaţia iraţională $-1 + \sqrt{2-x^2} = \sqrt{1-x^2}$ cu soluţiile $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Deci punctele de intersecţie sunt $A(1,0)$, $A'(-1,0)$. Pentru a vedea poziţia curbei lui f în raport cu g se calculează $f(x_0)$, $g(x_0)$ unde $x_0 \in [-1,1]$. Pentru $x_0 = 0$ rezultă $g(0) = 1 > f(0) = -1 + \sqrt{2}$. Deci pe $[-1,1]$, $g(x) > f(x)$ şi aria $(\Gamma_{f,g}) = \int_{-1}^1 (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$. □

4) Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între curbele de ecuaţii:

a) $y^2 = 4x$, $y = 2x$; b) $y^2 = 8x$, $x^2 = y$;

c) $y^2 = 8(2-x)$, $y^2 = 24(2+x)$.

R. a) Se determină mai întâi punctele de intersecţie ale curbelor: $y^2 = 4x$, care reprezintă o parabolă cu vârful în $O(0,0)$, având axa Ox ca axă de simetrie şi $y = 2x$, care reprezintă ecuaţia unei drepte. Pentru aceasta se rezolvă sistemul format din ecuaţiile curbelor

$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x \end{cases}$ Se găsesc soluţiile $(x_1 = 0,\ y_1 = 0)$, $(x_2 = 1,\ y_2 = 2)$ (fig. 12).

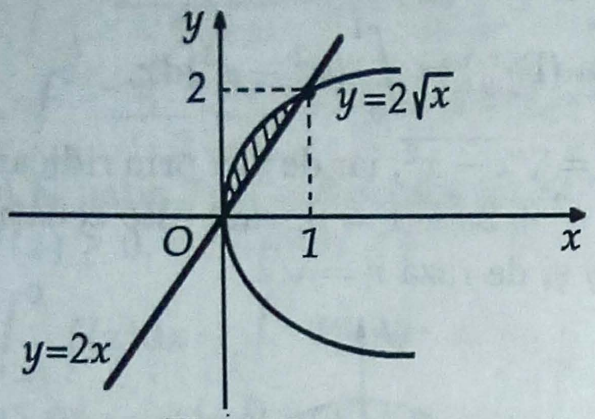


Fig. 12

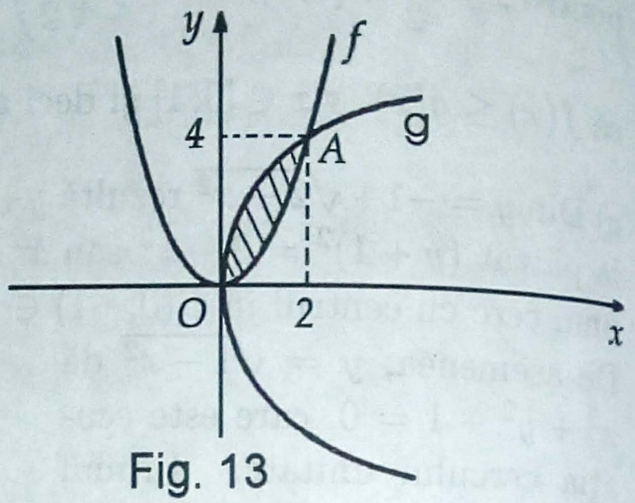


Fig. 13

Se consideră funcţiile $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $g(x) = 2\sqrt{x}$. Atunci

$$\text{Aria } (\Gamma_{f,g}) = \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1 - x^2\Big|_0^1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}. \ \square$$

b) Se determină punctele de intersecţie ale celor două parabole prin rezolvarea sistemului format de ecuaţiile curbelor:

$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = x^2. \end{cases}$ Se găsesc punctele $O(0,0)$, $A(2,4)$ (fig. 13).

Acum se consideră funcţiile $f, g : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{x}$.

$$\text{Aria } (\Gamma_{f,g}) = \int_0^2 (2\sqrt{2}\sqrt{x} - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}. \ \square$$

c) Curba $y^2 = 8(2 - x)$ reprezintă o parabolă cu vârful $V(2,0)$ având ca axă de simetrie axa Ox, iar curba $y^2 = 24(2 + x)$ este de asemenea o parabolă cu vârful $V'(-2,0)$ ce are ca axă de simetrie tot axa Ox (fig. 14).

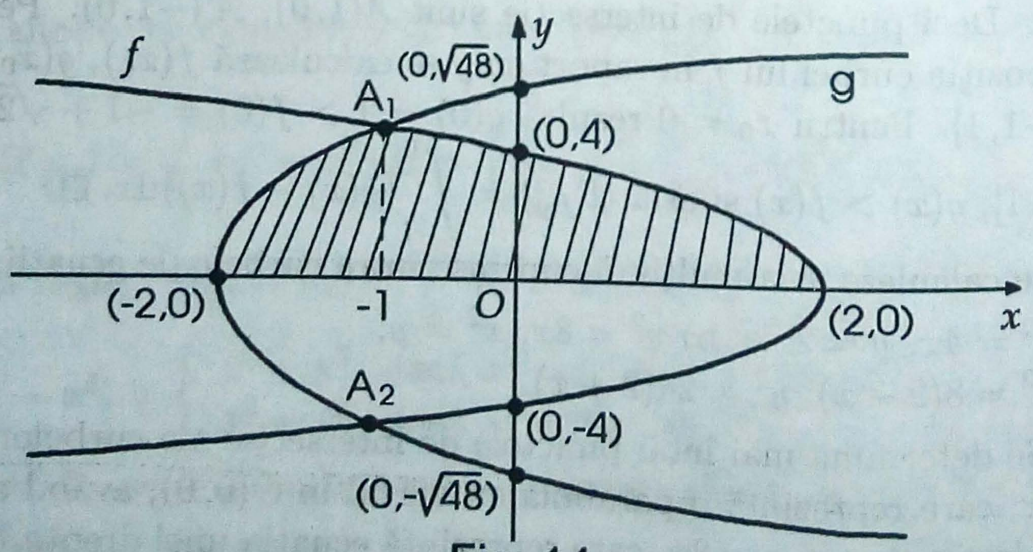


Fig. 14

Soluţiile sistemului $\begin{cases} y^2 = 8(2-x) \\ y^2 = 24(2+x). \end{cases}$ reprezintă punctele de intersecţie ale curbelor. Se găsesc $A_1(-1, \sqrt{24})$, $A_2(-1, -\sqrt{24})$.

Figura a cărei arie se cere este simetrică în raport cu axa Ox. Deci este suficient să găsim aria porţiunii haşurate şi apoi prin dublare să determinăm aria cerută.

Considerăm funcţiile

$f, g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{24(2+x)}$, $g(x) = \sqrt{8(2-x)}$.

Aria regiunii haşurate este

$$\int_{-2}^{-1} \sqrt{24(2+x)}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} \sqrt{8(2-x)}\mathrm{d}x = \frac{16\sqrt{6}}{3}.$$

Aria totală este egală cu $\frac{32\sqrt{6}}{3}$. □

Probleme propuse

1) Să se calculeze aria mulţimii Γ_f :

a) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$; b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

c) $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$;

d) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$;

e) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x$; f) $f : [4, 9] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

2) Să se calculeze aria mulţimii $\Gamma_{f,g}$:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}]$;

b) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3 - x$, $x \in [-2, 1]$;

c) $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.

3) Să se determine aria mulţimii cuprinse între curbele:

a) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$, $x \in [1, 3]$; b) $y = |x|$, $y = 1$, $x \in [-1, 1]$;

c) $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = 6x$; d) $y^2 = x$, $y = 2x - 1$;

e) $y = x^2$, $x + y = 2$; f) $y^2 = x$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y > 0$;

g) $y = x^2 - 3x + 3$, $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}$;

h) $y = x + e^{-x}$, $y = x$, $x \in [0, k]$, $k > 0$; i) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$;

j) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$; k) $4y = x^2$, $y^2 = 4x$;

l) $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$;

m) $y^2 = 2x + 1$, $y = x - 1$; n) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$;

p) $y = x^3$, $y = x$, $x > 0$; q) $y = x^4$, $y = \sqrt{x}$; r) $y = \frac{2}{x}$, $y = 3 - x$;

s) $y = -2x^2 + 3x + 6$, $y = x + 2$; t) $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 + 3$;

u) $y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 1$, $y = 2^{-x}$, $x = 2$ $(x \leq 2)$;

v) $y = 2^x$; $y = 4^x$, $x = 1$;

z) $y = \frac{1}{x^2+1}$, $y = \frac{x^2}{2}$; x) $3y = -x^2 + 8x - 7$, $y + 1 = \frac{4}{x-3}$;

y) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$.

4) Pentru ce valoare a lui a, aria mărginită de curbele $y = a^2x^2 + ax + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ este cea mai mică ?

5) Pentru ce valoare a lui $a > 0$, aria delimitată de curbele $y = \frac{x}{6} + \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = a$, $x = 2a$ ia cea mai mică valoare ?

4.1.3. Lungimea graficului unei funcţii derivabile cu derivata continuă *

Integrala definită permite să calculăm lungimea anumitor curbe. Presupunem că este dată o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Argumentarea este următoarea: lungimea curbei este limitată de aproximări de linii poligonale (ca în fig. 15).

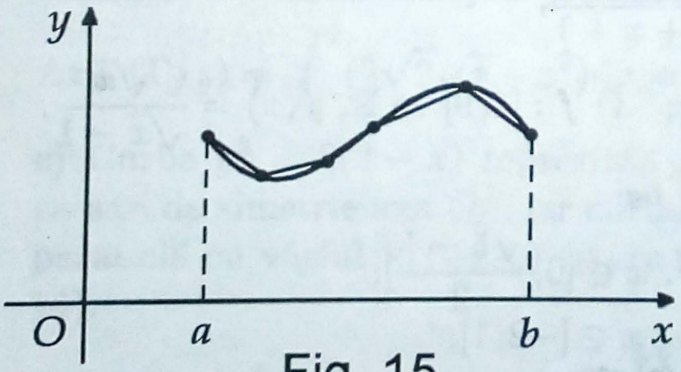


Fig. 15

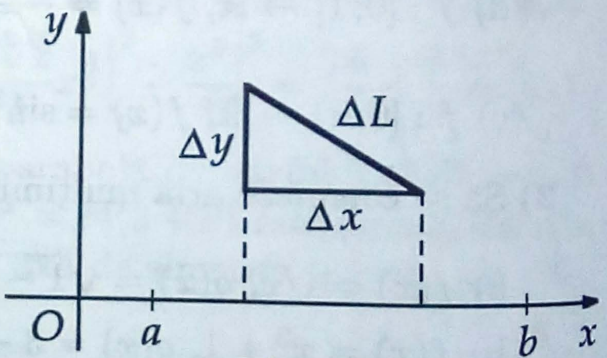


Fig. 16

Lungimea unui segment de aproximare (fig. 16) se obţine aplicând teorema lui Pitagora, când avem: $\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Lungimea totală a liniei poligonale ce aproximează curba este: $L \simeq \sum \Delta L = \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, care se mai scrie $L \simeq \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\, \Delta x$.

Dacă $\Delta x \to 0$, atunci $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'$. Este deci raţional să formulăm

*) Se adresează claselor cu o oră în plus la trunchiul comun

Teorema. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă, atunci

1) graficul lui f are lungime finită $l(f)$ şi

2) $l(f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$.

Exemplu cunoscut. Arătaţi că lungimea cercului de ecuaţie $x^2+y^2-R^2=0$ este egală cu $2\pi R$.

Probleme rezolvate

Să se determine lungimile graficelor următoarelor funcţii:

1) $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$;

2) $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln\sqrt[4]{x}$; 3) $f:[3,8]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$;

4) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; 5) $f:\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\sin x)$.

R. 1) Dacă notăm $y=\sqrt{1-x^2}$, atunci $x^2+y^2=1$ reprezintă ecuaţia cercului cu centrul în origine şi de rază 1.

Aplicând formula din teoremă avem $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ şi $1+(f'(x))^2=$

$=\frac{1}{1-x^2}$. Deci $l(f)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}$. □

2) Avem:

$$l(f)=\int_1^4\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_1^4\left(x+\frac{1}{4x}\right)\mathrm{d}x=\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\ln 2.\ \square$$

3) Găsim $l(f)=\int_3^8\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\Big|_3^8=\frac{38}{3}$. □

4) $l(f)=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x+e^{-x})\mathrm{d}x=$

$=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=\frac{e^2-1}{2e}$. □

5) $l(f)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)'}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=$

$=\ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\sqrt{3}$. □

Probleme propuse

Să se calculeze lungimile graficelor următoarelor funcţii:

1) $f:[-1,1,]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$; 2) $f:[\sqrt{3},\sqrt{8}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$;

3) $f:[1,e,]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{4}-\ln\sqrt{x}$;

4) $f:\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1-x^2)$; 5) $f:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\cos x)$;

6) $f:\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{1}{1-x^2}$; 7) $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}$;

8) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$.

4.2. Aplicaţii în geometria în spaţiu

Dacă se consideră o suprafaţă în spaţiu, atunci două probleme de natură geometrică pot fi formulate: să determinăm aria acestei suprafeţe precum şi volumul regiunii pe care o bordează (dacă suprafaţa este închisă).

4.2.1. Aria suprafeţelor de rotaţie *

Definiţie. Dacă $f:[a,b]\to[0,\infty)$ este o funcţie continuă, atunci mulţimea

$$S_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2+z^2}=f(x),\ x\in[a,b]\}$$

se numeşte **suprafaţa de rotaţie** determinată de f, sau suprafaţa obţinută prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox (fig. 17).

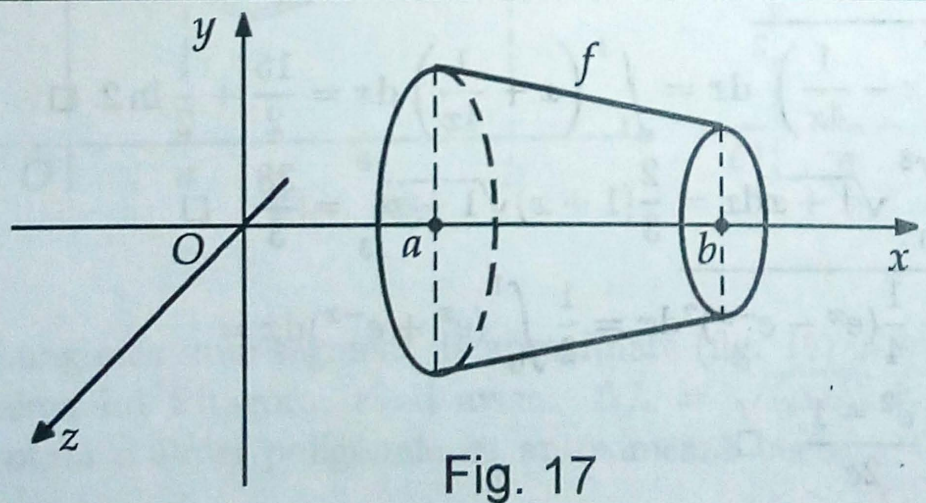


Fig. 17

Se consideră aria suprafeţei de rotaţie ca limita sumelor ariilor laterale ale trunchiurilor de con determinate de liniile poligonale înscrise(fig. 18).

*) Se adresează claselor cu o oră în plus la trunchiul comun

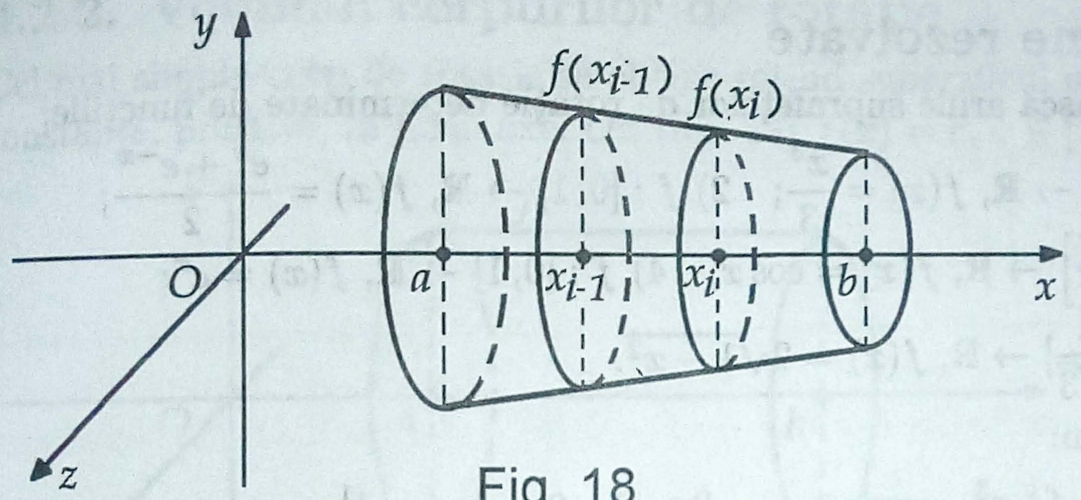


Fig. 18

Aria laterală a unui astfel de trunchi de con este $\pi[f(x_{i-1}) + f(x_i))]d(A_{i-1}, A_i)$, unde $A_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $A_i(x_i, f(x_i))$, iar suma ariilor laterale este

$$\pi \sum_i [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \pi \sum_i [f(x_{i-1}) +$$

$$+ f(x_i)] \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

şi aproximează aria suprafeţei de rotaţie. Dacă $\Delta x \to 0$, atunci $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'$. Acum este firesc să formulăm:

Teorema. Dacă $f : [a, b] \to [0, \infty)$ este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă, atunci

1) suprafaţa de rotaţie determinată de f are arie şi

2) această arie este $A(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x$.

Exemple cunoscute. 1. Arătaţi că aria laterală a unui con circular drept, de înălţime h şi de rază r se obţine prin rotaţia dreptei $y = mx$, $x \in [0, h]$ în jurul axei Ox, unde $m = \frac{r}{h}$ şi este egală cu $\pi r g$, unde g este generatoarea conului.

2. Arătaţi că aria laterală a unui trunchi de con de înălţime h şi cu razele bazelor r_1 şi r_2 se obţine prin rotaţia graficului funcţiei $f(x) = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} \cdot x$, $x \in [0, h]$, în jurul axei Ox. Găsiţi că această arie are expresia $\pi g(r_1 + r_2)$.

3. Arătaţi că aria sferei de rază R se obţine prin rotaţia graficului funcţiei $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, în jurul axei Ox şi această arie are expresia $4\pi r^2$.

Probleme rezolvate

Să se găsească ariile suprafeţelor de rotaţie determinate de funcţiile:

1) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$; 2) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

3) $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$; 4) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$;

5) $f:[0,\dfrac{1}{\sqrt{3}}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{1-x^2}$.

R. 1) Avem:

$$A(f)=2\pi\int_0^1\frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1).\ \square$$

$$2)\ A(f)=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1(e^{2x}+e^{-2x}+2)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}(e^2-e^{-2}+4).\ \square$$

$$3)\ A(f)=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=$$

$$=\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})].\ \square$$

$$4)\ A(f)=2\pi\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\mathrm{d}x=2\pi\int_1^e\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=$$

$$=\pi\left(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{\sqrt{2}+1}\right).\ \square$$

$$5)\ A(f)=2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x=4\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1+3x^2}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})].\ \square$$

Probleme propuse

Să se determine ariile suprafeţelor de rotaţie generate de funcţiile:

1) $f:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{tg}x$; 2) $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$;

3) $f:[1,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x}$; 4) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}$;

5) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$.

4.2.2. Volumul corpurilor de rotaţie

Cel mai simplu corp de rotaţie se obţine rotind subgraficul unei funcţii constante, pozitive, în jurul axei Ox (fig. 19) $f(x) = r$, $x \in [a, b]$.

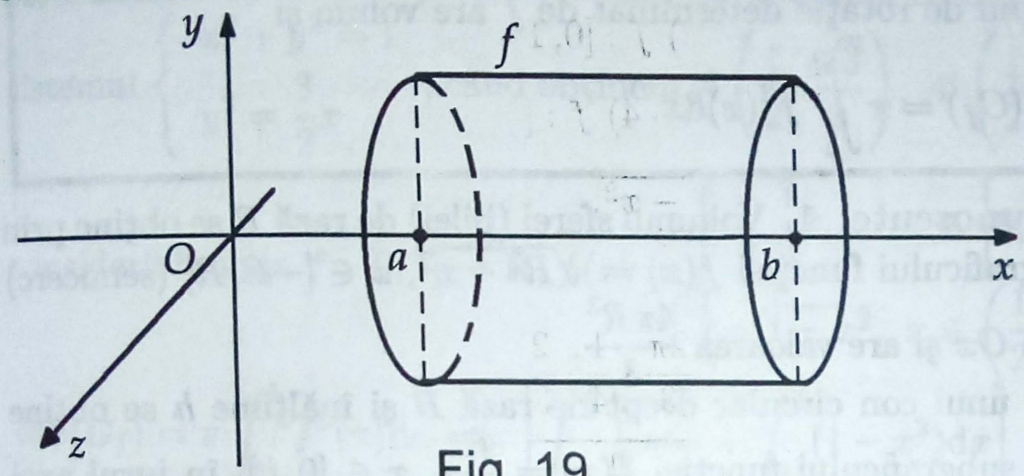


Fig. 19

Această mulţime se poate scrie

$C_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{y^2 + z^2} \leq r,\ a \leq x \leq b\}$.

Volumul acestui cilindru de rază r este vol $(C_r) = \pi r^2(b - a)$.

Definiţie. Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$. Mulţimea

$$C_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x),\ a \leq x \leq b\}$$

se numeşte **corpul de rotaţie** determinat de funcţia f sau corpul obţinut prin rotirea subgraficului lui f în jurul axei Ox (fig. 20).

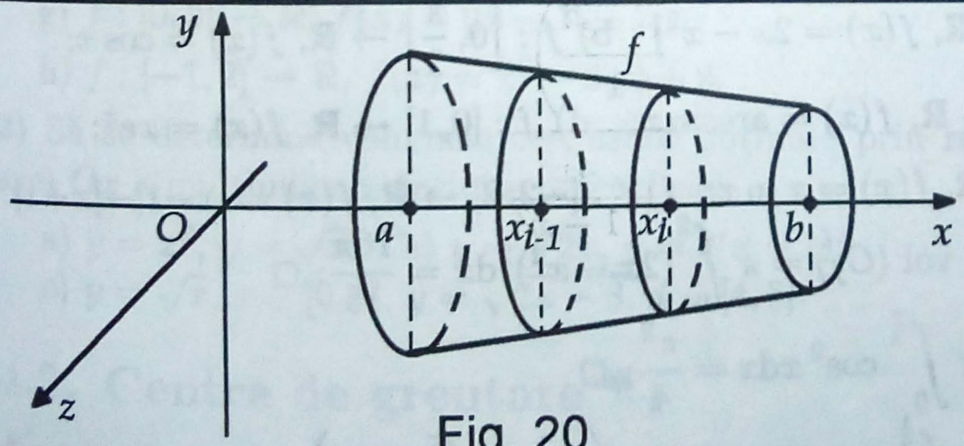


Fig. 20

Să considerăm secţiuni perpendiculare pe axa Ox (de rotaţie). Atunci acestea au forma unui disc de arie $\pi f^2(x_i)$.

Volumul corpului poate fi aproximat printr-o sumă de volume de cilindri de raze $f(x_i)$ şi înălţimi $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

Volumul total V se aproximează prin $V \simeq \sum \Delta V = \pi \sum_i f^2(x_i)\Delta x$.

Când $\Delta x \to 0$, atunci este normal ca suma acestor aproximaţii să tindă la V.

Are loc următorul rezultat.

Teoremă. Dacă $f : [a, b] \to [0, \infty)$ este o funcţie continuă, atunci

1) corpul de rotaţie determinat de f are volum şi

2) $\text{vol}\,(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Exemple cunoscute. 1. Volumul sferei (bilei) de rază R se obţine prin rotaţia subgraficului funcţiei $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$ (semicerc) în jurul axei Ox şi are valoarea $\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

2. Volumul unui con circular drept de rază R şi înălţime h se obţine prin rotaţia subgraficului funcţiei $f(x) = \dfrac{R}{h}x$, $x \in [0, h]$, în jurul axei Ox şi are valoarea $\dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

3. Volumul unui trunchi de con de raze r, R şi înălţime h se obţine prin rotaţia subgraficului funcţiei $f(x) = \dfrac{R - r}{h}x + r$, $x \in [0, h]$ în jurul axei Ox şi are expresia $\dfrac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$.

Probleme rezolvate

1) Să se calculeze volumele corpurilor de rotaţie determinate de funcţiile:

a) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$; b) $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;

c) $f : \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$; d) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$;

e) $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$; f) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| - |x+1|$.

R. a) Avem: $\text{vol}\,(C_f) = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{16\pi}{15}$; □

b) $\text{vol}\,(C_f) = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{4}$; □

c) $\text{vol}\,(C_f) = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin^2 x \mathrm{d}x = \pi\left(\dfrac{\pi^2}{72} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6} - 1\right)$; □

d) $\text{vol}\,(C_f) = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} \mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}(e^2 - 1)$; □

e) $\text{vol}\,(C_f) = \pi \int_1^e x^2 \ln^2 x \mathrm{d}x = \dfrac{(5e^3 - 2)\pi}{27}$; □

f) $\text{vol}\,(C_f) = \pi\left(\int_{-2}^{-1} 4\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 4x^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 4\mathrm{d}x\right) = \dfrac{32\pi}{3}$. □

2) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul lui Ox a mulţimii mărginite de cercul $x^2+y^2=1$ şi parabola $y^2=\frac{3}{2}x$.

R. Punctele de intersecţie ale cercului cu parabola se obţin rezolvând sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2=\frac{3}{2}x \end{cases}$, când obţinem $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}x}, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ \sqrt{1-x^2}, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$. Avem

$$\text{vol}\,(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2)\mathrm{d}x\right]=\frac{19\pi}{48}.\square$$

Probleme propuse

1) Să se calculeze volumele corpurilor de rotaţie determinate de funcţiile:

a) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$; b) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$;

c) $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{a}\sqrt{ax^3-x^4}$, $a>0$;

d) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}$; e) $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4}{x}$;

f) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{1-x}$;

g) $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=||x-1|-2|$;

h) $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3|x|+2$.

2) Să se determine volumele corpurilor obţinute prin rotaţia în jurul axei Ox a mulţimilor mărginite de curbele:

a) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$; b) $y=\sqrt{2x}$, $y=2(x-1)$;

c) $y=\sqrt{x}$, $x\in[0,8]$, $y=\sqrt{2x-8}$, $x\in[4,8]$.

4.3. Centre de greutate *

Am văzut în anii precedenţi că dat fiind sistemul de puncte materiale $S=\{m_1A_1,m_2A_2,\ldots,m_nA_n\}$ (unde prin m_1A_1 înţelegem că în punctul A_1 este aşezată masa m_1, etc.) atunci **baricentrul** Z al acestuia are expresia $Z=\dfrac{m_1A_1+m_2A_2+\ldots+m_nA_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$.

Dacă (x_i,y_i) sunt coordonatele lui A_i, iar (x_Z,y_Z) sunt coordonatele

---

* Se adresează claselor cu o oră în plus la trunchiul comun

baricentrului, atunci $x_Z = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$, $y_Z = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$.

În cazul când masele m_i sunt egale, în loc de baricentre se foloseşte termenul de **centru de greutate** al sistemului S, notat cu G.

În particular, pentru două puncte $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ în care avem puse mase egale, centrul de greutate are coordonatele:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_G = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Punctul G se găseşte situat la mijlocul segmentului $[A_1A_2]$.

În cele ce urmează considerăm plăci plane şi căutăm să extindem procedeul de definiţie al centrului de greutate şi la astfel de sisteme materiale.

Vom utiliza pentru aceasta regula de grupare a punctelor materiale care afirmă că: pentru determinarea centrului de greutate G al unui sistem de puncte materiale, se poate împărţi acel sistem în două sau mai multe părţi, să determinăm centrele de greutate G_j $(j = \overline{1,r})$ ale acelor părţi, să atribuim punctelor G_j masele totale ale părţilor respective şi să considerăm pe G ca centrul de greutate al punctelor G_j, dotate cu acele mase.

O placă plană este **omogenă** dacă masa oricărei porţiuni ale ei este egală cu produsul dintre o constantă pozitivă $|u_0$ (numită **masă specifică**) şi aria suprafeţei acelei porţiuni.

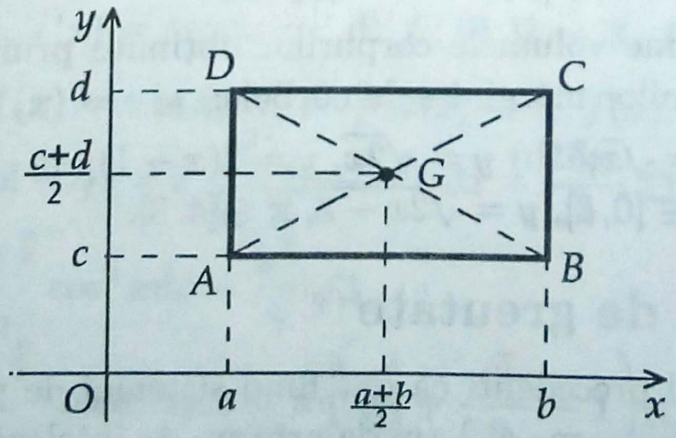


Fig. 21

Dacă se consideră o placă omogenă dreptunghiulară cu laturile AB, AD paralele cu axele Ox şi respectiv Oy (fig. 21), atunci orice punct al plăcii are coordonatele (x, y), unde $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Din motive de simetrie centrul de greutate coincide cu centrul său de simetrie şi deci $x_G = \dfrac{a+b}{2}$, $y_G = \dfrac{c+d}{2}$.

Considerăm acum trapezul curbiliniu omogen $aABb$ (fig. 22) cuprins între curba de ecuaţie $y = f(x)$ ($f \geq 0$ pe $[a,b]$, f continuă pe $[a,b]$), axa Ox şi dreptele $x = a$ şi $x = b$. Se consideră o diviziune a intervalului $[a,b]$, $(a = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_{pn-1}^{(n)}, x_{pn}^{(n)} = b)$ şi dreptunghiul elementar cu

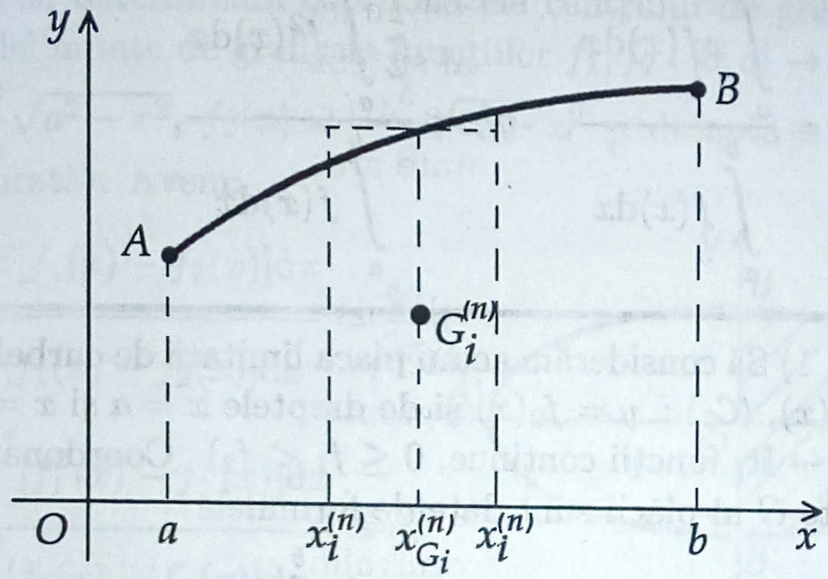


Fig. 22

baza $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ şi înălţime $f(x_{G_i}^{(n)})$, unde $x_{G_i}^{(n)}$ este mijlocul lui $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$. Centrul de greutate al acestui dreptunghi are coordonatele

$$x_{G_i}^{(n)} = \frac{x_{i-1}^{(n)} + x_i^{(n)}}{2},\ y_{G_i}^{(n)} = \frac{1}{2} f(x_{G_i}^{(n)}).$$

Masa acestui dreptunghi este $|u_0(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) f(x_{G_i}^{(n)})$. Atribuind punctului $G_i^{(n)}$ această masă şi procedând la fel pentru toate dreptunghiurile elementare astfel formate, centrul de greutate $G^{(n)}$ al reuniunii acestor dreptunghiuri coincide cu centrul de greutate al punctelor $G_i^{(n)}$. El are coordonatele

$$x_{G^{(n)}} = \frac{\sum_{i=1}^{p_n} |u_0(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) f(x_{G_i}^{(n)}) x_{G_i}^{(n)}}{\sum_{i=1}^{p_n} |u_0(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) f(x_{G_i}^{(n)})}$$

$$y_{G^{(n)}} = \frac{\sum_{i=1}^{p_n} |u_0(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) f(x_{G_i}^{(n)}) x_{G_i}^{(n)} \frac{1}{2} f(x_{G_i}^{(n)})}{\sum_{i=1}^{p_n} |u_0(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) f(x_{G_i}^{(n)})}$$

De aici pentru $n \to \infty$ se deduce următoarea:

Teoremă. Coordonatele centrului de greutate G al plăcii omogene determinate de curba $y = f(x)$ ($f : [a, b] \to (0, \infty)$, f continuă), axa Ox şi dreptele $x = a$ şi $x = b$ sunt date de

$$x_G = \frac{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

Observaţie. 1) Să considerăm acum placa limitată de curbele de ecuaţii $(\mathcal{C}_1) : y = f_1(x)$, $(\mathcal{C}_2) : y = f_2(x)$ şi de dreptele $x = a$ şi $x = b$ ($f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, funcţii continue, $0 \le f_1 < f_2$). Coordonatele centrului de greutate G al plăcii sunt date de formulele

$$x_G = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b x[f_2^2(x) - f_1^2(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x}.$$

2) Numitorii în formulele care dau coordonatele centrului de greutate reprezintă aria plăcii omogene.

Probleme rezolvate

1. Să se determine coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor omogene definite prin: a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2,\ y \ge 0\}$;

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\ x \ge 0,\ 0 < b < a\}$.

R. a) Placa omogenă delimitată de graficul funcţiei $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (fig. 23) şi axa Ox (zona haşurată) are centrul de greutate de coordonate

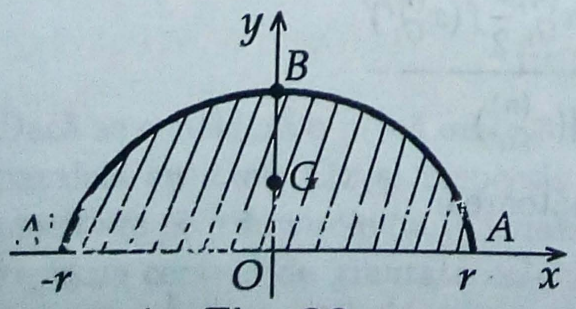


Fig. 23

$$x_G = \frac{\int_{-r}^{r} xf(x)\mathrm{d}x}{\int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x}{\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}} = 0,$$

$$y_G = \frac{1}{2}\frac{\int_{-r}^{r} f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Observăm că centrul de greutate este situat pe axa Oy, rezultat de aşteptat deoarece placa are ca axă de simetrie această axă. □

b) Se cere să determinăm coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene delimitate de graficele funcţiilor $f_1, f_2 : [0, a] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $f_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ şi dreapta $x = 0$ (fig. 24) (zona haşurată). Avem:

$$x_G = \frac{\int_0^a x[f_1(x) - f_2(x)]\mathrm{d}x}{\int_0^a [f_1(x) - f_2(x)]\mathrm{d}x} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a [f_1^2(x) - f_2^2(x)]\mathrm{d}x}{\int_0^a [f_1(x) - f_2(x)]\mathrm{d}x} = 0.$$

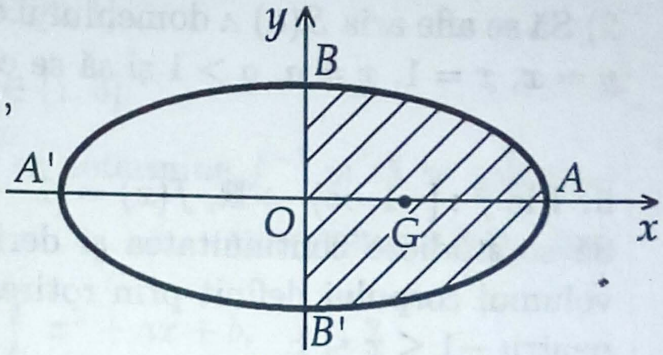


Fig. 24

Centrul de greutate al plăcii se află pe axa Ox, această axă fiind axa de simetrie a plăcii. □

Probleme propuse

Să se determine coordonatele centrelor de greutate pentru plăcile plane omogene exprimate prin:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2,\ x, y \geq 0\}$;

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2,\ y \geq 0\}$;

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 < b < a\}$;

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 2px,\ 0 \leq x \leq p,\ y \geq 0,\ p > 0\}$.

Subiecte date la admitere în facultăţi

1. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n - 4 - 2a_n}{\pi}\right)^n, \text{ unde } a_n = \int_1^n \frac{2x^2}{x^2 + 1}\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1978)

2. Să se determine numerele reale A, B, C astfel încât:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = Af\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Bf(0) + Cf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

pentru orice funcţie polinomială reală f de grad cel mult trei.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1979)

3. Se dă $f_n(x) = \dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{1+x^n}$, $x \in [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Să se traseze graficul funcţiei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$;

2) Să se calculeze $\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, I.P.B., 1978)

4. Fie $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4(1+x)^{-2}$.

1) Să se reprezinte graficul lui f.

2) Să se afle aria $S(a)$ a domeniului delimitat de graficul lui f şi dreptele $y = x$, $x = 1$, $x = a$, $a > 1$ şi să se calculeze apoi $\lim\limits_{a\to\infty} S(a)$.

(ADMITERE, I.P.B., 1978)

5. Fie $f : [-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |1 - \sqrt{x+1}|$.

Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f şi să se calculeze volumul corpului definit prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox, pentru $-1 \leq x \leq 1$. (ADMITERE, I.P.B., 1979)

6. Fie $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x(x+a)}$, $x \neq 0$, $x \neq -a$, a parametru real.

1) Să se traseze graficul lui f ştiind că acest grafic trece prin $A(1,1)$;

2) Să se determine aria figurii determinate de graficul lui f (cu a determinat la 1)), axa Ox şi dreptele $x = 1$, $x = 2$.

(ADMITERE, I.P.B., 1979)

7. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de $f(x) = \sqrt{x^2+1} + mx$, unde m este un parametru real.

1) Să se determine m astfel ca $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$;

2) Pentru $m = 2$, să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. (ADMITERE, I.P.G., 1979)u

8. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ e^{-x+1}, & x \geq 1. \end{cases}$

1) Să se studieze continuitatea lui f şi apoi să se traseze graficul funcţiei;

2) Să se calculeze integrala $\int_1^2 [xf''(x) + f'(x)]\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, A.S.E., 1978)

9. Fie funcţia $f : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+2bx+5}{x-a}$, unde a, b sunt parametri reali.

1) Să se determine a, b astfel încât $f'(-1) = f'(3) = 0$;

2) Pentru $a = -b = 1$ să se calculeze $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, A.S.E., 1978)

10. Determinaţi o primitivă a funcţiei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \begin{cases} x^2(\ln|x|)^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ şi calculaţi $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1981)

11. Se consideră funcţia $f : [0,3] \to [0,2]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x}, & x \in [0,1] \\ \dfrac{x+1}{2}, & x \in (1,3]. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă, să se determine f^{-1} şi să se calculeze $\int_0^3 f^2(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, A.S.E., 1982)

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 2 \\ bx + a, & x > 2. \end{cases}$

1) Să se găsească relaţia între numerele a, b pentru care f este continuă pe $\mathbb{R}$. Să se arate că în acest caz f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

(ADMITERE, A.S.E., 1982)u

2) Pentru a, b determinaţi mai sus să se găsească o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$ şi apoi să se calculeze $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$ *.

13. Să se calculeze $\lim\limits_{a \to -\infty} I(a)$, unde $I(a) = \int_a^0 e^x(2x^2 - 3x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, A.S.E., 1983)

14. Să se calculeze $\int_1^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{|x-a|+1}$, unde a este un număr real. Notând cu $I(a)$ rezultatul găsit, să se calculeze $\lim\limits_{a \to \infty} I(a)$.

(ADMITERE, I.P.B., 1983)

15. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |\ln|x-4||, & x \in \mathbb{R} - \left[\dfrac{7}{2}, \dfrac{9}{2}\right] \\ a\sin(2\pi x) + b, & x \in \left[\dfrac{7}{2}, \dfrac{9}{2}\right] \end{cases},$$

unde a, b sunt parametri reali.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1983)

---

* Această ultimă cerinţă nu figurează în problema dată în concurs.

Să se calculeze $\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$ pentru a, b determinaţi la continuitatea lui f pe $\mathbb{R}$.

16. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$

Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})}\mathrm{d}t$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1983)

17. Să se calculeze integrala $I = \int_0^2 \frac{|x-1|}{x^2+4}\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1984)

18. Să se calculeze $\lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1-x}{x^3+8}\mathrm{d}x$. (ADMITERE, A.S.E., 1985)

19. Să se arate că $2\sqrt{e} \leq \int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 e^{1-x^2}\mathrm{d}x \leq 1 + e$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1985)

20. Fie $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty)$, $f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t + \cos t)\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$.

Să se calculeze integrala şi să se arate că funcţia f este bijectivă.

(ADMITERE, A.S.E., 1986)

21. Să se calculeze $\int_1^3 |(x-1)(x-2)(x-3)|\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, I.P.B., 1986)

22. Fie funcţia $f : [1,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln\sqrt[4]{x}$. Să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie determinată de funcţia f.

(ADMITERE, A.S.E., 1987)

23. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{e^x}, & x < 1 \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$

Să se arate că f admite primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.

(ADMITERE, I.P.B., 1987)

24. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{2n} \sqrt[n]{e^k} \sin\frac{2k}{n}$. (ADMITERE, A.S.E., 1987)

25. Fie $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \mathrm{d}x$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

1) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit;
2) Să se găsească o relaţie de recurenţă între I_n şi I_{n-1} şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

(ADMITERE, I.P.B., 1988)

26. Să se calculeze integrala $\int_0^2 \max(\ln(1+x^2), 1)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1988)

27. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\min(x^2, |\ln x|), & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Să se arate că f este integrabilă şi să se calculeze $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, I.P.B., 1989)

28. Se consideră $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Să se arate că $1<\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x<1+\cos 1$. (ADMITERE, I.P.B., 1989)

29. Se notează $I_n=\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x(1+(\ln x)^2)}\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}$.

1) Să se calculeze I_0, I_1;
2) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$. (ADMITERE, I.P.CLUJ-NAPOCA, 1989)

30. Fie $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ p, & x=0,\ p\in\mathbb{R}.\end{cases}$

1) Pentru ce valori ale lui p funcţia f este integrabilă ?
2) Să se determine valorile lui $p\notin[0,1)$ pentru care f admite primitive.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1990)

31. Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}x\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, GEOLOGIE, CLUJ-NAPOCA, 1990)

32. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x\leq 0\\ a_0x^2+a_1x+a_2, & x>0,\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

a) Să se afle a_0, a_1, a_2 astfel încât f să fie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$;
b) Să se determine o rpimitivă a lui f (de la a)) pe $\mathbb{R}$.

(ADMITERE, A.S.E., 1990)

33. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f şi să se calculeze f';

b) Să se determine extremele locale şi punctele de inflexiune ale lui f;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$. (ADMITERE, A.S.E., 1990)

34. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\in(-\infty,-1)\\ 2x+\lambda, & x\in[-1,\infty),\ \lambda\in\mathbb{R}.\end{cases}$

a) Determinaţi pe λ astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$;

b) Aflaţi pentru ce valori ale lui λ funcţia dată admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi în acest caz determinaţi familia lor.

(ADMITERE, UNIVERSITATE BRAŞOV, 1990)

35. Să se arate că funcţia $f(x)=\min\{1,x,x^2\}$, $x\in\mathbb{R}$ admite primitive, este integrabilă pe $[-2,2]$ şi să se calculeze $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIVERSITATE CRAIOVA,1990)

36. a) Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^5}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze o primitivă a lui f.

(ADMITERE, UNIVERSITATE GALAŢI, 1990)

37. Se consideră $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(x+3)(x-1)^2}{x^2}$.

1) Asimptota oblică spre $+\infty$ la grafic este : $A(y=x-1)$;
$B(y=x+2)$; $C(y=x+1)$; $D(y=x+3)$; $E(y=x)$; *

2) Funcţia f admite un extrem local în punctul: $A(x_0=2)$;
$B(x_0=-1)$; $C(x_0=6)$; $D(x_0=\frac{6}{5})$; $E(x_0=1)$.

3) $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ este: $A(I=3-5\ln 2)$; $B(I=4-5\ln 2)$;
$C(I=5\ln 2-4)$; $D(I=3\ln 2+4)$; $E(I=4+5\ln 2)$.

(ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1992)

---

* Un singur răspuns este corect din cele indicate.

38. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\mathrm{d}t$.

1) Valoarea funcţiei f în punctul $x_0=1$ este:

$A\left(f(1)=-\ln 2+\frac{3\pi}{4}\right)$; $B\left(f(1)=\ln 2+\frac{3\pi}{4}\right)$;

$C\left(f(1)=-\ln 2+\frac{\pi}{4}\right)$; $D\left(f(1)=\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)$; $E\left(f(1)=-\ln 2+\frac{\pi}{2}\right)$.

2) Funcţia f admite un minim local în punctul: $A\left(x_0=\frac{1}{2}\right)$;

$B(x_0=1)$; $C(x_0=-1)$; $D\left(x_0=-\frac{1}{2}\right)$; $E\left(x_0=\frac{1}{3}\right)$.

(ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1992)

39. Se consideră $f:M\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+ax+b}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $M\subset\mathbb{R}$, fiind domeniul maxim de definiţie.

1) $x=1$ este asimptotă verticală şi în $x=3$ admite un extrem local pentru: $A(a=1,b=2)$; $B(a=-8,b=7)$; $C(a=-1,b=-2)$; $D(a=2,b=3)$; $E(a=5,b=3)$.

2) Pentru $a=1$, $b=-2$ domeniul maxim de definiţie M este: $A(M=\mathbb{R}-\{-2,1\})$; $B(M=\mathbb{R})$; $C(M=\mathbb{R}-\{-2,3\})$; $D(M=\mathbb{R}-\{1,2\})$; $E(M=\mathbb{R}-\{-1,1\})$.

3) Asimptota orizontală spre $+\infty$ este: $A(y=1)$; $B(y=0)$; $C(y=-1)$; $D(y=2)$; E (nu există).

4) Pentru $a=2$, $b=3$, $I=\int_{-2}^{1}\frac{(x+1)\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$ este: $A\left(I=\frac{1}{3}\ln 2+1\right)$;

$B\left(I=\frac{1}{3}\ln 2\right)$; $C(I=\ln\sqrt{2})$; $D\left(I=\ln 2+\frac{1}{2}\right)$; $E\left(I=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{2}\right)$.

(ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1992)

40. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}4^{mx}+1, & x\le 1\\ 2mx+2, & x>1.\end{cases}$

1) Să se determine numerele reale m pentru care f este continuă pe $\mathbb{R}$;

2) Să se studieze derivabilitatea lui f pe $\mathbb{R}$ pentru valorile lui m de la 1);

3) Pentru m de la 1) să se calculeze $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ (acest punct este adăugat).

(ADMITERE, A.S.E., CLUJ-NAPOCA, 1992)

41. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ ax^2+bx+c, & x>0,\ a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0.\end{cases}$

1) Să se studieze continuitatea lui f;
2) Pentru $c = 1$ să se determine o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

(ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1990)

42. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.

1) Să se calculeze $I_n = \int_0^n f(x)\mathrm{d}x$; 2) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

(ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1990)

43. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 0}$, unde $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n)\mathrm{d}x$.

1) Să se calculeze I_3; 2) Să se arate că şirul (I_n) este convergent;
3) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

(ADMITERE, I.P.B., 1990)

44. Fie $\mathcal{F}$ familia funcţiilor derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ având proprietatea

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(0) = f(1).$$

1) Să se determine funcţiile polinomiale de grad 3 din $\mathcal{F}$;
2) Să se arate că ecuaţia $f'(x) = 0$ are cel puţin două rădăcini reale în intervalul $(0, 1)$, pentru orice funcţie $f \in \mathcal{F}$.

(ADMITERE, I.P.B., 1990)

45. Fie $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$ ($[x]$ este partea întreagă a lui x).

1) Să se arate că f este integrabilă şi să se calculeze $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$;
2) Să se arate că f nu admite primitive.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1991)

46. Se consideră funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -2, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

Să se arate că f este integrabilă, dar nu are nici o primitivă.

Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

47. Fie $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4 + 5}{x^4 + 2}$.

1) Să se studieze monotonia lui f;
2) Să se arate că $\dfrac{7}{3} \leq \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leq 5$.

(ADMITERE, A.S.E., CLUJ-NAPOCA, 1992)

48. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^{ax}+1, & x\leq 1\\ ax+2, & x>1.\end{cases}$

Să se determine numerele reale a pentru care f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi să se determine aceste primitive.

(ADMITERE, A.S.E., CLUJ-NAPOCA, 1992)

49. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

1) Să se arate că f admite primitive pe $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$;

2) Să se arate că f nu admite primitive pe $[0,1]$;

3) Să se calculeze $\int x^3 f(x)\mathrm{d}x$, $x\in\mathbb{R}$.

(ADMITERE, A.S.E., CRAIOVA, 1992)

50. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leq 0\\ ax+b, & x>0,\ a,b\in\mathbb{R}.\end{cases}$

Să se determine a,b astfel încât f să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

(ADMITERE, A.S.E., CRAIOVA, 1992)

51. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\leq 1\\ \alpha x+\beta, & x>1.\end{cases}$

1) Să se determine α,β astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$;

2) Să se reprezinte grafic funcţia obţinută;

3) Să se calculeze aria mulţimii mărginită de curbele $y=f(x)$, $x=-1$, $x=2$ şi $y=0$.

(ADMITERE, A.S.E., GALAŢI, 1992)

52. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^2\left(\frac{x}{x+1}+|x-1|e^{-x}\right)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, A.S.E., IAŞI, 1992)

53. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x^2+n, & x\leq 2\\ 2mx^3+11m, & x>2,\ m,n\in\mathbb{R}.\end{cases}$

1) Să se determine m,n astfel încât f să fie continuă pe $\mathbb{R}$;

2) Să se determine m,n pentru care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

3) Cu m,n de la 2) să se determine o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$ **(punct adăugat)**.

(ADMITERE, A.S.E., REŞIŢA, 1990)

54. Se dă funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1]\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0.\end{cases}$

Să se arate că f admite o primitivă şi să se calculeze aceasta.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, 1993)

55. Să se calculeze:

a) $\int \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$, $x > -1$; b) $\int \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x$, $x > -1$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE FIZICĂ, 1993)

56. Se consideră $f : [0, b] \to \mathbb{R}$, $0 < b < 1$, dată de $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

1) Să se arate că f satisface condiţiile teoremei lui Lagrange pe $[0, b]$;

2) Aplicând teorema lui Lagrange, funcţiei f, pe $[0, b]$, să se determine $c \in (0, b)$, depinzând de b şi notat prin $c(b)$; 3) Să se calculeze $\lim\limits_{b\to 0} c(b)$;

4) Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} c(b)db$. (ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1993)

57. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\cos 4x$.

1) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-x}(a\cos 4x + b\sin 4x)$ să fie o primitivă a funcţiei f;

2) Să se calculeze $I_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

3) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. (ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1993)

58. Fie funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \in [-1, 0) \\ cx^2 + 6x + 6, & x \in [0, 1], \ a, b, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1) Să se determine a, b, c astfel încât funcţiei f să i se poată aplica teorema lui Rolle pe $[-1, 1]$;

2) Să se aplice teorema lui Rolle funcţiei obţinute;

3) Pentru a, b, c de la 1) să se calculeze o primitivă pe $[-1, 1]$ pentru f. **(punctul 3) este adăugat)**

(ADMITERE, A.S.E.(R.E.I.), BUCUREŞTI, 1993)

59. Se consideră $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & x \in [1, e] \\ ax + b, & x \in (e, 5], \ a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să verifice condiţiile teoremei lui Lagrange;

2) Să se calculeze: $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x$. (ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1993)

60. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}(x - 4\sin x)$.

1) Să se calculeze $L_1 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $L_2 = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$;

2) Să se calculeze $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$;

3) Să se găsească numărul de soluţii ale ecuaţiei $f(x) = 0$ din intervalul $[0, 3\pi]$.

(ADMITERE, U.P.B., 1993)

61. Fie $f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

1) Să se arate că f este o funcţie Rolle;

2) Să se aplice teorema lui Lagrange a creşterilor finite pentru f;

3) Să se arate că $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{72}$.

(ADMITERE, A.S.E., CLUJ-NAPOCA, 1993)

62. Se dă $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|e^{\frac{1}{x-2}}$.

1) Să se reprezinte grafic f;

2) Să se arate că pentru $x > 2$ are loc inegalitatea $f(x) \geq 4\sqrt{e}$.

(ADMITERE, A.S.E., CLUJ-NAPOCA, 1993)

63. a) Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2 + bx - 2)e^{-x}$, să fie o primitivă a funcţiei $f(x) = x^2e^{-x}$.

b) Să se arate că funcţia $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

nu are primitive.

(ADMITERE, A.S.E., CLUJ-NAPOCA, 1993)

64. Să se calculeze: 1) $\int_0^{x^2} (t+2)e^{-t}\,dt$;

2) $F'(x)$ dacă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^2} (t+2)e^{-t^2}\,dt$.

(ADMITERE, A.S.E., CLUJ-NAPOCA, 1993)

65. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x \sin x, & x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$

admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi calculaţi o primitivă a lui f.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, CLUJ-NAPOCA, 1993)

66. Fie $f(x) = e^{3x} - x - 1$. a) Să se calculeze f', f'' şi $f^{(n)}$.

b) Să se arate că $e^{3x} \geq x + 1$, pentru $x > 0$.

c) Să se calculeze aria mărginită de graficele funcţiilor $g(x) = e^x$ şi $h(x) = e^{-2x}(x+1)$ şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$.

(ADMITERE, UNIVERSITATEA TEHNICĂ, CLUJ-NAPOCA, 1993)

67. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ k, & x=0.\end{cases}$

a) Să se arate că f posedă primitive pentru $x\in(0,\infty)$ şi să se calculeze o primitivă.

b) Să se determine k astfel încât f posedă primitive pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n=\int_{-n}^{n} f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, A.S.E., CIBERNETICĂ, BUCUREŞTI, 1994)

68. Fie $f(x)=e^x-x-1$.

a) Să se calculeze extremele funcţiei f.

b) Să se arate că $f(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Să se demonstreze că: $\frac{1}{e}\leq\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\leq\frac{\pi}{4}$.

(ADMITERE, A.S.E., CIBERNETICĂ, BUCUREŞTI, 1994)

69. Se consideră $I_n=\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1, I_2.

b) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton şi mărginit.

(ADMITERE, A.S.E., CIBERNETICĂ, BUCUREŞTI, 1994)

70. Fie $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$ şi o funcţie continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Să se arate că funcţia $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definită prin $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ este o primitivă a funcţiei f.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, BUCUREŞTI, 1994)

71. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, BUCUREŞTI, 1994)

72. a) Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-x)e^x$. Să se calculeze $f'(0)$, $f''(0)$ şi să se afle $n\in\mathbb{N}^*$ dacă $f^{(n)}_{(0)}<2$.

b) Să se calculeze $l_1=\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $l_2=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE ELECTRONICĂ ŞI TC., BUCUREŞTI, 1994)

73. Fie $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+ax+b}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

1) Să se determine a,b astfel încât graficul funcţiei să admită ca unică asimptotă verticală dreapta $x=2$;

2) Pentru $a = -4$, $b = 4$ să se reprezinte grafic funcţia (folosind şi derivata a doua);

3) Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de graficul funcţiei (de la pct. 2), axa Ox şi dreptele $x = -2$, $x = 0$.

(ADMITERE, UNIVERSITATEA PLOIEŞTI,1994)

74. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 0 \\ x^3 \ln x, & x > 0. \end{cases}$

1) Să se studieze continuitatea funcţiei f;

2) Să se calculeze $\int f(x)\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$.

(ADMITERE, UNIVERSITATEA PLOIEŞTI,1994)

75. a) Definiţi noţiunea de primitivă pentru funcţia $f : I \to \mathbb{R}$.

b) Fie $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

Să se calculeze I_0, I_1, I_2 şi să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru I_n. (ADMITERE, INFORMATICĂ ECONOMICĂ, CLUJ-NAPOCA, 1994)

76. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|\ln\left(\frac{1}{2} + |x|\right)\right|$.

a) Să se studieze derivabilitatea funcţiei f pe domeniul său de definiţie;

b) Să se determine primitivele funcţiei f.

(ADMITERE, A.S.E., CRAIOVA, 1994)

77. Să se calculeze $\int \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x}$ pe $(-\pi, \pi)$ şi pe $(-\pi, 3\pi)$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, IAŞI, 1994)

78. Funcţia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \max(x, x\ln(1+x))$ este integrabilă pe $[0, 2]$ şi să se calculeze $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, IAŞI, 1994)

79. Fie $I_n = \int_1^e \ln^n x\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$;

1) Să se arate că $(I_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit;

2) Să se găsească o relaţie de recurenţă între I_n şi I_{n-1};

3) Să se calculeze $\lim I_n$.

(ADMITERE, UNIVERSITATE, BAIA MARE, 1994)

80. 1) Să se calculeze $a_k = \int_0^k \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 3x + 2}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

2) Să se calculeze $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + n\ln\frac{1}{2}$.

3) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 4) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{\ln n}$.

(ADMITERE, A.S.E.(R.E.I.), BUCUREŞTI, 1994)

81. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx+c, & x<1 \\ \operatorname{arctg}(x-1), & x\geq 1. \end{cases}$

1) Ştiind că f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$.

2) Pentru $a=1$, $b=2$, $c=3$ să se calculeze $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

(ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1994)

82. Să se calculeze $\int_0^2 e^x f(x)\mathrm{d}x$, unde $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max(x,x^3)$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, CRAIOVA, 1994)

83. Fie funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)=x\cos x\sin^{2n-1}x$.

a) Să se calculeze $F_n(x)=\int f_n(x)\mathrm{d}x$, pentru $n=1$ şi $n=2$.

b) Să se determine $F_2(x)$ astfel încât $F_2(\pi)=-\dfrac{3\pi}{2}$.

c) Să se stabilească o formulă de recurenţă pentru calculul lui $F_n(x)$, $n\geq 2$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, CLUJ-NAPOCA, 1994)

84. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin
$f(x)=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}(x^2+3x+2,-x^2+6x+7)$.

a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei f;

b) Să se determine punctele de extrem;

c) Să se calculeze aria cuprinsă între axa Ox, graficul funcţiei şi dreptele $x=-3$ şi $x=3$.

(ADMITERE, A.S.E., BUCUREŞTI, 1994)

85. Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{8}$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, BUCUREŞTI, 1995)

86. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\left[\dfrac{1}{x}\right], & x>0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

a) Construiţi graficul funcţiei pe $\left[\dfrac{1}{n+2},\dfrac{1}{n}\right]$, $n\in\mathbb{N}^*$ fixat;

b) Studiaţi integrabilitatea funcţiei f pe $\left[\dfrac{1}{n+2},\dfrac{1}{n}\right]$ şi în caz afirmativ calculaţi $\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x$.

c) Dovediţi că f admite primitive pe $(1,\infty)$ şi determinaţi o primitivă a sa.

(ADMITERE, A.S.E.(R.E.I.), BUCUREŞTI, 1995)

87. Se consideră $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n e^{1-x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $0 \leq f_n(x) \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dacă $I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$, atunci să se determine o formulă de recurenţă între I_n şi I_{n-1}.

c) Să se arate că şirul (I_n) este mărginit.

(ADMITERE, A.S.E. MANAGEMENT, BUCUREŞTI, 1995)

88. Se consideră $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t \ln t}{(1+t^2)^2}, & t > 0 \\ 0, & t = 0. \end{cases}$

Se cere:

a) să se studieze continuitatea funcţiei în $t = 0$;

b) să se calculeze $I_n = \int_1^n f(t)\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

(ADMITERE, A.S.E.-CIBERNETICĂ, BUCUREŞTI, 1995)

89. 1) Să se arate că $\dfrac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, $x > 0$.

2) Utilizând 1) să se arate că pentru $1 < a \leq b$ au loc inegalităţile

$$\frac{1}{e}(e^b - e^a) \leq \int_a^b x^x \mathrm{d}x \leq e^{b^2}(e^{-a} - e^{-b}).$$

(ADMITERE, A.S.E.-CIBERNETICĂ, BUCUREŞTI, 1995)

90. Fie $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{x+1}\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$. 1) Să se calculeze I_0, I_1;

2) Se cere $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

(ADMITERE, UNIVERSITATEA TEHNICĂ, CLUJ-NAPOCA, 1995)

91. Fie $F : [0,1) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \dfrac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t$. Să se arate că

1) $0 \leq \ln \dfrac{1}{1-x} - F(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$, $x \in [0,1)$, $n \in \mathbb{N}^*$;

2) $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$, $x \in [0,1)$, $n \in \mathbb{N}^*$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k \cdot 2^k} = \ln 2$.

(ADMITERE, FACULTATEA DE MATEMATICĂ, IAŞI, 1995)

*

92. Se consideră $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min\left\{x,\dfrac{2}{1+x^2}\right\}$.

Fie $A=\{a\in(0,2)|\,(\nexists)f'(a)\}$ şi $I=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\mathrm{d}x$. Atunci

1) $A(A\cap[0,\frac{3}{2})=\emptyset)$; $B(A=\{1\})$; $C(A\cap(0,1)\neq\emptyset)$; $D(A=\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\})$; $E(A=\emptyset)$ (6 puncte)

2) $A(I=\dfrac{1}{2}+\pi)$; $B(I=\dfrac{3-\pi}{6})$; $C(I=\dfrac{6-\pi}{12})$; $D(I=\dfrac{\pi+3}{6})$; $E(I=\dfrac{3+2\pi}{6})$ (3 puncte). (ADMITERE, A.S.E. BUCUREŞTI, 1997)

93. Se consideră funcţia $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-[x]}{2x-[x]+1}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x. Fie S suma punctelor de discontinuitate ale funcţiei f şi $I=\displaystyle\int_0^{2} f(x)\mathrm{d}x$. Atunci:

1) $A(S=\dfrac{1}{2})$; $B(S=1)$; $C(S=2)$; $D(S=3)$; $E(S=\dfrac{3}{2})$ (6 puncte);

2) $A(I=\ln\dfrac{3}{2})$; $B(I=1-\ln 6)$; $C(I=1-\dfrac{1}{4}\ln 12)$; $D(I=\dfrac{1}{2}-\ln 12)$; $E(I=\dfrac{1}{4}\ln 12-1)$ (3 puncte).

(ADMITERE, A.S.E. CONTABILITATE, BUCUREŞTI, 1997)

94. Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{[x]}{x^2+3x[x]+2[x]^2}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, $a_n=\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$, $L=\lim\limits_n a_n$ şi $\alpha=f(2-0)+f(2+0)$. Stabiliţi dacă:

1) $A(L=\ln 6)$; $B(L=\ln\dfrac{3}{2})$; $C(L=\infty)$; $D(L=\ln\dfrac{2}{3})$; $E(L=0)$ (6 puncte);

2) $A(\alpha=\dfrac{1}{12})$; $B(\alpha=\dfrac{3}{4})$; $C(\alpha=\dfrac{1}{6})$; $D(\alpha=\dfrac{1}{24})$; $E(\alpha=\dfrac{5}{6})$ (3 puncte).

(ADMITERE, A.S.E. CIBERNETICĂ, BUCUREŞTI, 1997)

---

* Un singur răspuns este corect.

95. Fie $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+xn+1}{n^2+3n-2}\right)^n$ şi $I = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. Valoarea lui I este: a) e^{-4}; b) e^{-3}; c) e^{-2}; d) e^{-1}; e) 0.

(ADMITERE, UNIV., R.E.I., CONSTANŢA, 1999)

96. Se dă integrala $I_n = \int_0^n \dfrac{\mathrm{d}t}{(t+2)(\sqrt{1+t}+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculaţi I_n; b) Calculaţi $\lim\limits_n I_n$.

(ADMITERE, UNIV., MATEMATICĂ, PITEŞTI, 1999)

97. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4+x}{\sqrt{9+x^2}}$ şi $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$. Atunci:

a) $I = 1$; b) $I = -1$; c) $I = 0$; d) $I = 3$; e) altă variantă.

(ADMITERE, UNIV., ECONOMIE, PLOIEŞTI, 1999)

98. Valoarea integralei $\int_1^2 \sqrt{x^2+x^3}\mathrm{d}x$ este: a) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2}$; c) 1; d) $\dfrac{2}{15}(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$; e) $\dfrac{4}{15}(6\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

(ADMITERE, ACADEMIA TEHNICĂ MILITARĂ, BUCUREŞTI, 2000)

99. Fie F o primitivă a funcţiei $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, f continuă pe $(0,\infty)$ şi care satisface proprietăţile: $2xF(x) = f(x)$, $\forall x > 0$ şi $f(\ln 2) = 8(\ln 2)e^{\ln^2 2}$. Dacă $T = f(1)$ şi $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$, atunci:

1) a) $T = e + \ln 2$; b) $T = 8e$; c) $T = e^{-\ln^2 2}$; d) $T = 2e^2$; e) $T = 2\ln^2 2$.
2) a) $I = e^3 + 1$; b) $I = e^4 - 1$; c) $I = e^2 - 3$; d) $I = 4e(e^3-1)$; e) $I = e^4 + e^3 + 1$. (ADMITERE, A.S.E., CIBERNETICĂ, BUCUREŞTI, 2000)

100. Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\limits_{y\in[0,1]} (x-y)^2$. Dacă S este suma derivatelor laterale ale lui f în $x_0 = \dfrac{1}{2}$ şi $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, atunci: 1) a) $S = -1$; b) $S = -\dfrac{1}{2}$; c) $S = 0$; d) $S = \dfrac{1}{2}$; e) $S = 1$.
2) a) $I = \dfrac{5}{12}$; b) $I = \dfrac{3}{4}$; c) $I = \dfrac{1}{3}$; d) $I = \dfrac{7}{12}$; e) $I = \dfrac{7}{6}$.

(ADMITERE, A.S.E., ECONOMIA MEDIULUI, BUCUREŞTI, 2000)

101. Se consideră funcţia $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f_m(x) = \sqrt[3]{x^2+(m-2)x-m+2}$, $m \in \mathbb{R}$.
Fie $A = \{m \in \mathbb{R} \mid f_m' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Pentru $m \in A$, fie $I(m) = \int_{\frac{2-m}{2}}^{\frac{3-m}{2}} \dfrac{1}{f^3(x)}\mathrm{d}x$ şi $L = \lim\limits_{m\to 1} I(m)$. Atunci:
1) a) $A = (-1,3)$; b) $A = (2,\infty)$; c) $A = (-2,2)$;

d) $A=(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$; e) $A=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$;

2) a) $L=\dfrac{1}{\pi\sqrt{3}}$; b) $L=\dfrac{\pi+1}{6}$; c) $L=\dfrac{\pi}{3}$; d) $L=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$; e) $L=\pi\sqrt{3}$.

(ADMITERE, A.S.E., CONTABILITATE, BUCUREŞTI, 2000)

102. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-x}, & x\geq 1\\ x^2-x, & x<1\end{cases}$

a) Arătaţi că f admite primitive.

b) Calculaţi o primitivă a funcţiei f.

(ADMITERE, UNIV., MATEMATICĂ, BAIA MARE, 2001)

103. I. Fie $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$ şi D este domeniul maxim de definiţie.

1. Pentru $a=-1$ şi $b=0$ reprezentaţi grafic funcţia f.

2. Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ dacă şi numai dacă $a+b+1=0$.

II. Fie $I_n=\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Calculaţi I_2.

2. Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi calculaţi $\lim\limits_n I_n$.

(ADMITERE, UNIV., MATEMATICĂ, BRAŞOV, 2001)

104. 1. Fie a un număr real strict pozitiv şi $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+a^2}{2x}$.

i) Să se studieze monotonia funcţiei f;

ii) Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+a^2}{2x_n}$, unde $x_0>a$.

Să se studieze monotonia şi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Să se calculeze limita şirului. Ce se poate spune dacă $0<x_0<a$?

2. Fie $n\geq 0$ un număr natural şi fie $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^x\mathrm{d}x$.

i) Să se calculeze I_1 şi I_2.

ii) Să se stabilească legătura între I_n şi I_{n+1}.

iii) Să se arate că $I_n\leq e-1$ pentru orice $n\geq 0$.

(ADMITERE, UNIV., MATEMATICĂ, BUCUREŞTI, 2001)

105. Să se calculeze $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)}$. a) $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; d) $-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; e) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}-\dfrac{\pi}{12}$.

(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ DE CONSTRUCŢII, BUCUREŞTI, 2001)

106. 1. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ (D este domeniul maxim de definiţie), $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $x \in D$. Funcţia f admite un extrem egal cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi are asimptota oblică $y = -x + \frac{1}{2}$ la $-\infty$ dacă: a) $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$; b) $a = b = c = 1$; c) $a = c = 1$, $b = -1$; d) $a = b = 1$, $c = -1$; e) $a = c = 1$, $b = 3$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n \int_n^{2n} \frac{x+1}{\sqrt{x^6+1}} \mathrm{d}x$ este: a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 2; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{3}{4}$.

(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ, CLUJ-NAPOCA, 2001)

107. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

i) Să se determine a şi b astfel încât graficul funcţiei f să admită ca asimptotă oblică dreapta de ecuaţie $y = x + 2$;

ii) Pentru $a = b = 1$ să se studieze variaţia funcţiei f şi să se reprezinte grafic;

iii) Să se calculeze aria mulţimii mărginite de graficul funcţiei f (determinată la punctul ii), asimptota oblică şi dreptele de ecuaţii $x = 2$ şi $x = 3$.

(ADMITERE, UNIV., MATEMATICĂ, CRAIOVA, 2001)

108. Fie $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} \mathrm{d}x$, $m \in \mathbb{N}$.

a) Calculaţi I_1, I_2.

b) Să se arate că I_m este constantă oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$.

(ADMITERE, UNIV., MATEMATICĂ, SIBIU, 2001)

109. a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \int_n^{2n} \frac{x\mathrm{d}x}{1 + x^5}$. a) $\frac{1}{24}$; b) $-\frac{7}{24}$; c) $\frac{5}{24}$; d) $\frac{7}{24}$; e) $\frac{3}{8}$.

b) Fie $a < b$ şi $f : [0, b - a] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[0, b - a]$. Să se calculeze: $\int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a) + f(b-x)} \mathrm{d}x$ în funcţie de a şi b.

a) $\frac{b-a}{2}$; b) $b - a$; c) $a - b$; d) $\frac{a-b}{4}$; e) $\frac{b-a}{3}$.

(ADMITERE, UNIV., INGINERI, SIBIU, 2001)

110. 1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{|x^2 + x|}$. Să se determine mulţimile: $D = \{x_0 \in \mathbb{R};\ f \text{ derivabilă în } x_0\}$, $E = \{x_0 \in \mathbb{R};\ x_0 \text{ este punct de extrem pentru } f\}$ şi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Să se calculeze $I = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$.

(ADMITERE, UNIVERSITATE, MATEMATICĂ, TIMIŞOARA, 2001)

111. Se consideră funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x e^t\ln(1-t+t^2)dt$. Dacă p este numărul punctelor de extrem local ale lui F, atunci:

a) $p=2$; b) $p=1$; c) $p=0$; d) $p=4$; e) $p=3$.

(ADMITERE A.S.E., R.E.I., BUCUREŞTI, 2002)

112. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\{x^2+ax+b, x^2+bx+a\}$, $a<b$ şi $f(-1)=4$, $f(2)=9$. Dacă $I=\int_0^3 f(x)dx$, atunci:

a) $I=\frac{11}{4}$; b) $I=\frac{17}{4}$; c) $I=\frac{37}{2}$; d) $I=\frac{43}{2}$; e) $I=\frac{13}{2}$.

(ADMITERE, A.S.E., MANAGEMENT, BUCUREŞTI, 2002)

113. Dacă $I_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\operatorname{arctg}(nx)dx$, $n\in\mathbb{N}$ şi $L=\lim_{n\to\infty} n(n+1)I_n$, atunci:

a) $L=0$; b) $L=1$; c) $L=\frac{\pi}{4}$; d) $L=\frac{\pi}{2}$; e) $L=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ADMITEREA, A.S.E., EC. GENERALĂ, BUCUREŞTI, 2002)

114. Dacă $l=\lim_{n\to\infty} n\int_n^{n+1}\frac{dx}{2\sqrt[3]{x^3+1}}$, atunci:

a) $l=\frac{1}{2}$; b) $l=\infty$; c) $l=\ln 2$; d) $l=1$; e) $l=e$.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV. CONSTANŢA, 2002)

115. Se dau funcţiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^{x^2}\sin t^2 dt$ şi $g(x)=\int_0^x e^{t^3}dt$. Care este valoarea limitei $\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{g(x)}$?

a) $\frac{1}{2}$; b) $e-1$; c) 1; d) $1-e$; e) 0.

(ADMITERE, POLITEHNICĂ, TIMIŞOARA, 2002)

Teste pentru pregătirea examenului de bacalaureat

Testul 1

I. 1. Se consideră matricile

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ şi } C = aA + bB,$$

unde a şi b sunt parametrii reali.

a) (4p) Să se calculeze determinantul matricei A şi să se determine rangul ei.

b) (3p) Să se demonstreze că $\text{rang}(aA + bB) = 3$ dacă şi numai dacă $ab \neq 0$.

c) (2p) Să se arate că $A^2 = 6A$ şi $B^2 = -6B$.

d) (2p) Să se arate că $AB = BA$.

e) (2p) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = tX$, $t \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $X^n = t^{n-1}X$.

f) Să se determine matricea C^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

(Subiectul III, varianta 4, Bacalaureat, profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie, iunie 2000)

2. Se consideră şirurile (a_n), (b_n) definite astfel:

$a_0 = 2$, $a_n - 2a_{n-1} = 2n + 3$, $n \geq 0$, $\quad b_n = a_n + 2n - 1$, $n \geq 0$.

a) Să se arate că şirul (b_n) este o progresie geometrică, determinându-se primul termen şi raţia. Să se precizeze termenul general al fiecărui şir.

b) Fie şirurile cu termenii generali $S_n = \sum_{t=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{i=0}^{n} b_i$.

Să se determine termenul general al fiecărui şir şi, dacă există, să se calculeze limitele şirurilor.

II. 1. Să se arate că $\max(x^2 + 3x + 2, x^2 - 5x + 6) \geq \frac{15}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Într-o clasă de 30 de elevi, 20 sunt pasionaţi de matematică, 15 de limbi străine, iar 8 sunt pasionaţi şi de matematică şi de limbi străine. Dacă se alege la întâmplare un elev din această clasă care este probabilitatea ca el să fie:

a) pasionat de matematică, dar nu de limbi străine ?

b) pasionat de matematică sau (nu exclusiv) de limbi străine ?

c) fără pasiune pentru matematică şi limbi străine ?

3. Fie $(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, $a_n, b_n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine a_n, b_n. b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

III. 1. Se consideră ABC şi ABD două triunghiuri echilaterale de latură a incluse respectiv în planele α şi β. Dacă $CA \perp AD$, atunci să se calculeze:

a) măsura unghiului planelor.

b) măsura unghiului dreptelor AB şi CD.

c) distanţa între dreptele AB şi CD.

d) măsura unghiului planelor (CAD) şi (CBD).

2. Se consideră cercurile $(\mathcal{C}_\lambda)$: $x^2 + y^2 + (\lambda - 5)x - (\lambda + 1)y + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că aceste cercuri trec prin două puncte fixe A şi B.

b) Să se determine locul geometric al centrelor cercurilor $(\mathcal{C}_\lambda)$.

c) Să se calculeze aria triunghiului ale cărui vârfuri sunt cele două puncte fixe şi centrul aceluia din cercurile care trece prin origine.

3. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $A(3, -2, -7)$ şi este paralel cu planul $2x - 3z + 5 = 0$.

IV. 1. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 3, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f.

2. Pe mulţimea $A = (0, \infty)$ se definesc legile de compoziţie $x \top y = xy$, $x \perp y = x^{\ln \sqrt{y}}$, $x, y > 0$.

a) Să se arate că tripletul $(A, \top, \perp)$ este corp comutativ.

b) Să se arate că corpul de la a) este izomorf cu corpul numerelor reale $(A, +, \cdot)$ printr-un izomorfism de forma $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = ae^{bx}$.

(Pentru profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie)

Testul 2

I. 1. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^2 - |x| = mx(x + 1)$ să aibă trei rădăcini.

2. Să se rezolve ecuaţiile: a) $|x + 3| - a|x - 1| = 4$;

b) $2\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{27 - 14x} = 1$; c) $(1 + i)z^2 + (i - 6)z + 2 - 3i = 0$.

3. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} X\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y + z = \widehat{1} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \widehat{2} \\ x^3 + y^3 + z^3 = \widehat{1} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_7$; c) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x - my - z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

II. 1. Să se arate că $\sqrt{x^2+x}\cdot\ln(1+\frac{1}{x})<1$, $\forall x>0$.

2. Să se determine constantele $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care (pe rând):

a) $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{x^4+2x^3+3x+4}-(ax^2+bx+c)]=0$;

b) $P(1)+\dfrac{P(x)}{x-x_1}+\dfrac{P(x)}{x-x_2}+\dfrac{P(x)}{x-x_3}=9x^2+4x-2$, unde $P=aX^3-bX^2+2X-c$ şi are rădăcinile x_1,x_2,x_3. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=P(x)$, atunci arătaţi că f este bijectivă şi calculaţi $(f^{-1})'(-11)$.

3. a) Să se arate că $\dfrac{2ab}{a+b}\le\dfrac{a+b}{2}$, $\forall a,b>0$.

b) Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{cd}{c+d}+\frac{da}{d+a}\le\frac{a+b+c+d}{2},\ a,b,c,d>0.$$

III. 1. Se consideră triunghiul ABC determinat de dreptele suport $(AB):\ x+2y-4=0$, $(BC):\ 3x+y-2=0$, $(AC):\ x-3y-4=0$.

a) Să se determine coordonatele punctului A.

b) Să se scrie ecuaţia înălţimii din A.

c) Să se afle aria triunghiului ABC.

2. Se consideră sfera $S(O,25)$ de centru O şi rază 25. Un plan α situat la distanţa 15 faţă de punctul O intersectează sfera după cercul $\mathcal{C}(Q,r,\alpha)$. Să se calculeze: a) raza r a cercului de intersecţie; b) aria totală şi volumul conului cu vârful în O, având ca bază cercul $\mathcal{C}(Q,r,\alpha)$;

c) raportul ariilor celor două calote în care planul α împarte sfera.

3. Pentru ce valori ale lui a şi b planul $ax+by+3z-5=0$ este perpendicular pe dreapta $x=3+2t$, $y=5-3t$, $z=-2-2t$, $t\in\mathbb{R}$?

IV. 1. Să se determine numerele reale a, b astfel încât legea definită pe $\mathbb{R}$: $x*y=xy+2ax+by$ să fie asociativă şi comutativă.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

a) Să se traseze graficul funcţiei f.

b) Să se rezolve inecuaţia $f(x)<x$.

Fie şirul (x_n) definit prin $x_0\in\mathbb{R}$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $n\ge0$. Să se arate că:

c) (x_n) este constant $\Leftrightarrow$ x_0 ia două valori care se cer determinate.

d) dacă $x_0\in(-1,0)$, atunci $x_n\in(-1,0)$, $\forall n$ şi (x_n) este strict descrescător.

e) $0<x_{n+1}+1\le\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}(x_n+1)$, $\forall x\ge0$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

f) $\lim\limits_{x\to-1}(-f(x))^{\frac{1}{x^2-1}}=\sqrt[4]{e}$.

(Pentru profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie)

Testul 3

I. 1. a) Să se rezolve ecuaţia: $\log_x \sqrt{5} + \log_2(5x) = \frac{9}{4} + (\log_2 \sqrt{5})^2$.

b) Să se rezolve inecuaţia: $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$;

c) Să se rezolve inecuaţia: $a^2 - 9^{x+1} - 8 \cdot 3^x \cdot a > 0$, unde $a > 0$ este parametru.

2. Se consideră şirurile definite prin termenii generali:
$a_n = 3^{-n}$, $b_n = \ln(a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică. Determinaţi primul termen şi raţia fiecărei progresii.

b) Să se calculeze limitele şirurilor cu termenii generali
$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ şi $t_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$, $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine n pentru care coeficienţii termenilor unu, doi şi respectiv trei ai dezvoltării, formează o progresie aritmetică.

b) Pentru $n = 8$, verificaţi dacă există termeni ai dezvoltării astfel încât puterea lui y să fie număr natural.

II. 1. Se consideră sistemul (S) $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + az + t = -1 \\ x - y + z + bt = c \end{cases}$, a, b, c parametrii reali. Să se determine a, b, c astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2 şi sistemul să fie compatibil.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$.

a) Să se calculeze limitele funcţiei spre $+\infty$ şi $-\infty$.

b) Să se determine domeniul de derivabilitate şi să se calculeze derivata funcţiei f. Să se stabilească monotonia funcţiei f. Precizaţi numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$.

c) Să se stabilească intervalele de concavitate, convexitate şi punctele de inflexiune ale funcţiei f.

3. Să se calculeze: a) $\int \frac{(x^2 - 3x + 2)\mathrm{d}x}{x^3 + 2x^2 + x}$, $x > 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln \frac{2n}{2n+3}$; c) $\int_{-2}^{3} \min(x^2, 3x - 2)\mathrm{d}x$.

III. 1. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii: $d_1 : x + 2y - 6 = 0$, $d_2 : 2x + y - 6 = 0$, $d_3 : 3x + 2y - 10 = 0$.

a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

c) Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0,0)$ şi care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

(Subiectul I, problema 3, varianta 9, Bacalaureat, profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie, iunie 2000)

2. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată laturile bazelor sunt 18 şi respectiv 12, iar feţele laterale fac cu planul bazei mari unghiuri diedre de 45°. Să se determine înălţimea şi muchia laterală a trunchiului de piramidă precum şi înălţimea peramidei din care provine trunchiul.

3. Să se determine punctul de intersecţie al dreptei $(d): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$ cu planul $(\mathcal{P}): \ 2x+3y+z-1=0$.

IV. 1. Se defineşte şirul $(I_n)_n$ astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}, \ I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+3}\mathrm{d}x, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + 3I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.

d) Utilizând punctele b) şi c) să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $4I_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq 4I_n$.

e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{4n}$.

f) Să se arate că limita şirului $(nI_n)_{n\geq 1}$, este $\dfrac{1}{4}$.

(Bacalaureat, iunie 2000, varianta 5, subiectul IV, profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie)

2. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y - 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea „ $*$ “ este asociativă.

b) Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru al legii „ $*$ “.

c) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relaţia

$x * (-x + 8) = 4$.

(Bacalaureat, iunie 2000, varianta 4, problema 2, subiectul I, profilurile economic, fizică-chimie, chimie-biologie)

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

pag. 237. 1) a) $e-1$; b) $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$; c) $\ln\frac{4}{3}$; d) $\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$; e) $\frac{4}{3}$; f) $7+2\ln 2$. **2)** a) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^3}$; b) $\frac{9}{2}$; c) $e+\frac{1}{e}-2$. **3)** a) $\frac{10}{3}$; b) 1; c) $A_1=\frac{4}{3}(\sqrt{3}+4\pi)$, $A_2=\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$; d) $\frac{9}{16}$; e) $\frac{9}{2}$; f) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$; g) 2; h) $1-\frac{1}{e^k}$; i) $\frac{8}{3}$; j) $\frac{125}{6}$; k) $\frac{16}{3}$; l) $17,5-6\ln 6$; m) $\frac{16}{3}$; n) $e+\frac{1}{e}-2$; p) $\frac{1}{4}$; q) $\frac{7}{15}$; r) $\frac{3}{2}-2\ln 2$; s) 9; t) $\frac{8}{3}$; u) $6\frac{1}{3}-\frac{3}{4\ln 2}$; v) $\frac{1}{2\ln 2}$; z) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; x) $9-8\ln 2$; y) $\frac{8}{9}$. **4)** $a=-\frac{3}{4}$ când $\min S=\frac{13}{16}$. **5)** $a=1$ când $\min S=\frac{3}{4}$.

pag. 240. 1) $\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$; 2) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{4}(e^2+1)$; 4) $-\frac{1}{2}+\ln 3$; 5) $\ln(\sqrt{2}+1)$; 6) $\ln 5-\frac{2}{3}$; 7) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$; 8) 2.

pag. 242. 1) $\pi[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2}]$; 2) 3π; 3) $\frac{2\pi}{3}(7\sqrt{7}-3\sqrt{3})$; 4) $\frac{4\pi}{243}(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2})$; 5) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{8}-\frac{\pi}{8}\ln(1+\sqrt{2})$.

pag. 245. 1) a) $\frac{\pi^2}{2}$; b) $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^4}\right)$; c) $\frac{\pi a^3}{20}$; d) $\frac{2\pi}{5}$; e) 12π; f) $\frac{\pi}{12}$; g) 5π; h) $\frac{21\pi}{10}$. **2)** a) $\frac{3\pi}{10}$; b) $\frac{8\pi}{3}$; c) 16π.

pag. 249. a) $x_G=\frac{4R}{3\pi}$, $y_G=\frac{4R}{3\pi}$; b) $x_G=0$, $y_G=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}{r_1+r_2}$; c) $x_G=\frac{4a}{3\pi}$, $y_G=\frac{4b}{3\pi}$; d) $x_G=\frac{3p}{5}$, $y_G=\frac{3\sqrt{2}}{8}p$.

pag. 249. 1. $a_n=2n-2-2\operatorname{arctg}n+\frac{\pi}{2}$; $e^{-\frac{4}{\pi}}$. **2.** Pentru $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ rezultă $\frac{2b}{3}+2d=A\left(-\frac{a}{2\sqrt{2}}+\frac{b}{2}-\frac{c}{\sqrt{2}}+d\right)+Bd+C\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}+\frac{b}{2}+\frac{c}{\sqrt{2}}+d\right)$, $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$. De aici $A=B=C=\frac{2}{3}$. **3.** 1) $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in[0,1)$, $f(x)=\frac{x}{x-1}$, $x>1$; 2) $\ln\sqrt{2}$. **4.** 2) $S(a)=\int_1^a\frac{4dx}{(x+1)^2}=-\frac{4}{x+1}\Big|_1^a=\frac{2a-2}{a+1}$; $\lim\limits_{a\to\infty}S(a)=2$. **5.** Funcţia f este continuă pe $[-1,\infty)$ (compunere, diferenţă şi iar compunere de funcţii continue; f este derivabilă pe $(-1,\infty)-\{0\}$ (se explicitează modulul - diferenţă de funcţii derivabile).

Volumul este $V = \pi \int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x = (12 - 8\sqrt{2})\frac{\pi}{3}$. **6.** 1) Din $f(1) = 1$ rezultă $a = 2$; 2) $2 + \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{17}{2}\ln 2$. **7.** 1) $m = 2$; 2) $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$. **8.** 1) $\mathbb{R} - \{1\}$ este domeniul de continuitate; 2) $1 - \frac{2}{e}$. **9.** 1) $a = 1$, $b = -1$; 2) $\frac{3}{2} + 4\ln 2$. **10.** Funcţia este continuă pe $[-1, 1]$. O primitivă $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ este $F(x) = \frac{x^3}{3}\left[(\ln|x|)^2 - \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{2}{9}\right]$, $x \neq 0$, $F(0) = 0$. Integrala are valoarea $\frac{4}{27}$. **11.** Se arată că din $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă $x_1 = x_2$ în trei situaţii: 1) $x_1, x_2 \in [0, 1]$; 2) $x_1, x_2 \in (1, 3]$; 3) $x_1 \in [0, 1]$, $x_2 \in (1, 3]$ (aici se arată că din $x_1 \neq x_2$ rezultă $f(x_1) \neq f(x_2)$). Pentru surjectivitate se arată că $\forall y \in [0, 2]$, există $x \in [0, 3]$ astfel încât $f(x) = y$.

Observaţie. Din tabelul de variaţie pentru f se poate arăta că f este bijecţie. Semnul derivatei ne dă monotonia (deci informaţii despre injectivitate), iar mulţimea valorilor $f([0, 3]) = [0, 2]$ ne spune că f este surjectivă;

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - (1 - x)^2, & x \in [0, 1] \\ 2x - 1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$ Integrala este egală cu $\frac{29}{6}$.

12. 1) Funcţia f restricţionată la $(-\infty, 2]$, $(2, \infty)$ este continuă fiind elementară. Din $\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 2} f(x) = f(2)$ rezultă $4 + 2a + b = 2b + a$, adică $b = a + 4$. 2) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + (a + 4)x$, dacă $x \leq 2$ şi $F(x) = \frac{(a+4)x^2}{2} + ax + \frac{8}{3}$, dacă $x > 2$; integrala este egală cu $12a + \frac{104}{3}$. **13.** $I(a) = 7 - e^a(2a^2 - 7a + 7)$; $\lim\limits_{a \to -\infty} I(a) = 7$. **14.** Dacă $a \leq 1$, atunci $I(a) = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x - a + 1} = \ln\frac{4 - a}{2 - a}$; dacă $a \in (1, 3]$, atunci $I(a) = \int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{a - x + 1} + \int_a^3 \frac{\mathrm{d}x}{x - a + 1} = \ln a(4 - a)$; dacă $a > 1$, atunci $I(a) = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{a - x + 1} = \ln\frac{a}{a - 2}$. Avem $\lim\limits_{a \to \infty} I(a) = 0$. **15.** Dacă $b = \ln 2$ şi $a \in \mathbb{R}$, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$; dacă $b \neq \ln 2$, atunci f este continuă pe $\mathbb{R} - \{\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$. Pentru studiul derivabilităţii se calculează f'. Funcţia nu este derivabilă în $x = 3$, $x = 5$. Dacă $a = -\frac{1}{\pi}$, atunci f este derivabilă în $\frac{7}{2}$, iar pentru $a = \frac{1}{\pi}$, funcţia f este derivabilă în $\frac{9}{2}$. **16.** Avem:

$$f(e^t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ e^t - 1, & t \in (0, 1] \end{cases}, \quad f(e^{-t}) = e^{-t},\ t \in [0, 1] \text{ şi deci}$$

$\frac{f(e^t)}{f(e^{-t})} = \begin{cases} t, & t = 0 \\ e^t(e^t - 1), & t \in (0,1]. \end{cases}$ Valoarea integralei este $\frac{1}{2}(e-1)^2$.

17. $\frac{1}{2}\left(\ln\frac{32}{25} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. **18.** $\int_1^b \frac{1-x}{x^3+8}dx = \frac{1}{8}\ln\frac{(b+2)^2}{(b-1)^2+3} - \frac{1}{8}\ln 3 -$ $-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{b-1}{\sqrt{3}}$; $-\frac{1}{8}\ln 3 - \frac{\pi}{8\sqrt{3}}$. **19.** Se consideră $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) =$ $= e^{x^2} + e^{1-x^2}$ şi se arată că $2\sqrt{e} \le f(x) \le 1+e$, $x \in [0,1]$. **20.** $f(x) =$ $= \operatorname{tg}x - x - \ln(\cos x)$. Funcţia f este continuă, strict crescătoare $(f'(x) > 0)$ şi $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\nearrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$, ceea ce arată că f este bijectivă. **21.** $\frac{1}{2}$.

22. $\frac{270 - 32\ln 2 - \ln^2 2}{4}\pi$. **23.** Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$. O primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are forma $F(x) = \begin{cases} -xe^{-x}, & x < 1 \\ \frac{1}{3}\ln^3 x - \frac{1}{e}, & x \ge 1. \end{cases}$ **24.** Se aduce suma la forma $2\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n}e^{2\frac{k}{2n}}\sin\left(4\frac{k}{2n}\right)$, care sugerează considerarea funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}\sin 4x$. Găsim că limita este egală cu $2\int_0^1 e^{2x}\sin 4x =$ $= \frac{1}{5}[2 + e^2(\sin 4 - 2\cos 4)]$. **Altfel.** Dacă se scrie suma sub forma $\frac{2}{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n} e^{\frac{k}{n}}\sin\left(2\frac{k}{n}\right)$, atunci se ia $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x) = e^x\sin 2x$ şi limita sumei este $\int_0^2 g(x)dx$. **25.** 1) Cum $x \in [1,e]$ rezultă $0 \le \ln x \le 1$ şi deci $0 \le (\ln x)^n \le 1$, iar de aici prin integrare $I_n \in [0, e-1]$, $\forall n \ge 1$. Deci (I_n) este mărginit. De asemenea $I_n - I_{n-1} < 0$, adică şirul (I_n) este monoton descrescător. Conform teoremei lui Weierstrass şirul (I_n) este convergent.

2) Integrând prin părţi rezultă $I_n = e - nI_{n-1}$ sau $\frac{I_n}{n} = \frac{e}{n} - I_{n-1}$. Trecând aici la limită rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. **26.** Avem $\max(\ln(1+x^2), 1) =$ $= \begin{cases} 1, & x \in [0, \sqrt{e-1}] \\ \ln(x^2+1), & x \in (\sqrt{e-1}, 2]. \end{cases}$ Integrala are valoarea $2\ln 5 - 4 + 2\sqrt{e-1} +$ $+ 2\operatorname{arctg}2 - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e-1}$. **27.** Avem $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,a] \\ -\ln x, & x \in (a,1] \end{cases}$ $a \in (0,1)$, o funcţie continuă pe $[0,1]$. Integrala este egală cu $1 - a - \frac{2a^3}{3}$. **28.** Funcţia $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ fiind continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ este integra-

bilă aici. Cum f diferă de g într-un singur punct din $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se deduce că şi f este integrabilă şi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x$. Inegalitatea $1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x < 0$. Se arată că dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci $\frac{2}{\pi} - \frac{\sin x}{x} < 0$. Pentru a doua inegalitate avem $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < 1 + \cos 1$. Aceasta are loc pentru că $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < 1$ şi $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \cos 1$ (Se procedează ca la cea din membrul stâng). **29.** 1) $I_0 = \operatorname{arctg}(\ln 2)$; $I_1 = \frac{1}{2}\ln(1 + \ln^2 2)$; 2) Se pune $t = \ln x$ şi deci $I_n = \int_0^{\ln 2} \frac{t^n}{t^2+1}\mathrm{d}t$. Avem $0 \le I_n \le \int_0^{\ln 2} t^n \mathrm{d}t = \frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$. De aici, via criteriul „cleştelui", rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. **30.** 1) Funcţia f este integrabilă $\forall p \in \mathbb{R}$ (Dacă $p = 1$, atunci f este continuă pe $[-\pi, \pi]$, iar pentru $p \neq 1$ funcţia f se obţine din funcţia integrabilă $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ prin modificarea acesteia într-un singur punct). 2) O funcţie f admite primitive dacă ea are proprietatea lui Darboux. Se analizează cazurile: $1^0)$ $p = 1$; $2^0)$ $p > 1$; $3^0)$ $p < 0$. Răspunsul corect $p = 1$. **31.** Se arată că $\ln(1 + \operatorname{tg} x) < \operatorname{tg} x$, dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. **32.** a) f continuă în $x = 0$ dă $a_2 = 0$, iar din $f'_s(0) = f'_d(0)$ rezultă $a_1 = -1$ şi în fine din $f''_s(0) = f''_d(0)$ se obţine $a_0 = -\frac{1}{2}$;

b) $F(x) = \begin{cases} (x-1)\ln(1-x) - x, & x \le 0 \\ -\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}, & x > 0. \end{cases}$

33. a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$; f este continuă pe $\mathbb{R}$; f este derivabilă pe $\mathbb{R}$; $f'(0) = 0$, $f'(x) = \frac{2-3x^2}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}}$; b) $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ punct de minim, iar $x = +\sqrt{\frac{2}{3}}$ punct de maxim; $x = \pm\sqrt{\frac{9 \pm \sqrt{33}}{12}}$ puncte de inflexiune;

c) $a_n = \frac{e^{-\frac{1}{n^2}} - e^{-1}}{2} \to \frac{1 - e^{-1}}{2}$. **34.** a) Din f continuă în $x = -1$ rezultă $\lambda = 1$. Se verifică uşor că $f'_s(-1) = f'_d(-1) = 2$. b) Se scrie f sub forma $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < -1 \\ 2x+1, & x \ge -1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \lambda - 1, & x \ge -1. \end{cases}$ Cum prima funcţie admite primitive pe $\mathbb{R}$ (fiind continuă) se impune ca a doua funcţie să aibă primitive

pe $\mathbb{R}$. Aceasta are loc dacă $\lambda - 1 = 0$, când $F(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3}, & x < -1 \\ x^2 + x + \frac{1}{3}, & x \geq -1 \end{cases}$, este o primitivă pentru f pe $\mathbb{R}$.

35. Avem $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-2, 0] \\ x^2, & x \in (0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2], \end{cases}$ care este continuă pe $[-2, 2]$. Deci admite primitive şi este integrabilă pe $[-2, 2]$, când se găseşte $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} xdx + \int_{0}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{2} dx = -\frac{2}{3}$. **36.** a) Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^*$ (compunere şi produs de funcţii continue). Din $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ rezultă f continuă pe $\mathbb{R}$. Deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Schimbând variabila $t = \frac{1}{x^2}$ şi apoi integrând prin părţi se obţine o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ **37.** 1) C; 2) E; 3) B. **38.** 1) A; 2) D. **39.** 1) B; 2) A; 3) B 4) C. **40.** 1) $m = 0$; 2) Este derivabilă pe $\mathbb{R}$, $(f(x) = 2)$; 3) 4. **41.** 1) f este continuă pe $\mathbb{R}^*$ fiind definită prin funcţii elementare. Din continuitatea în $x = 0$ rezultă $c = 1$; 2) Pentru $c = 1$ funcţia f fiind continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive. O primitivă este $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + x + 1, & x > 0. \end{cases}$ **42.** 1) $-(n^2 + 2n + 2)e^{-n} + 2$; 2) 2, pentru că $\lim_{n} \frac{n^2 + 2n + 2}{e^n} = 0$. **43.** 2) $0 \leq x^n \leq 1$ implică $1 \leq 1 + x^n \leq 2$ care prin logaritmare dă $0 \leq \ln(x^n + 1) \leq \ln 2 < 1$. Integrând aceste inegalităţi rezultă $0 \leq I_n \leq 1$, adică şirul (I_n) este mărginit. Din $x^{n+1} \leq x^n$, $x \in [0, 1]$ rezultă $1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$, $\ln(1 + x^{n+1}) \leq \ln(1 + x^n)$ şi în final $I_{n+1} \leq I_n$, ceea ce arată că şirul este descrescător; 3) $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$. **44.** 1) Se consideră $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Egalităţile din ipoteză dau $\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = d = a + b + c + d$. De aici $b = -\frac{3a}{2}$, $c = \frac{a}{2}$, $d \in \mathbb{R}$; 2) Din teorema de medie, există $c \in (0, 1)$ astfel ca $\int_{0}^{1} f(x)dx = f(c)$. Din $f(c) = f(0)$ şi $f(c) = f(1)$, via teorema lui Rolle, există $\alpha \in (0, c)$, $\beta \in (c, 1)$ astfel ca $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. **45.** 1) Avem $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ x - 1, & x \in [1, 2) \\ 0, & x = 2. \end{cases}$ Funcţia f fiind integrabilă pe $[0, 1]$ şi pe

$[1,2]$ este integrabilă pe $[0,2]$ şi $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x = 1$. 2) Prin absurd dacă

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{x^2}{2}-x+k, & x\in[1,2)\\ k', & x=2\end{cases}$$

ar fi o primitivă a lui f, atunci din condiţia de continuitate a lui F în $x=1$ şi $x=2$ (la stânga) rezultă $k=1$ şi $k'=1$. Dar $F'_s(1)=1\neq 0=F'_d(1)$. Deci F nu este derivabilă în $x=1$.

Altfel. Dacă prin absurd f ar admite primitive, atunci $[x]=x-f(x)$ ar admite primitive ca diferenţă de funcţii cu această proprietate. Dar se ştie că $x\to[x]$, $x\in[0,2]$ nu are primitive (nu are proprietatea lui Darboux). **46.** Funcţia f fiind integrabilă pe $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ şi $\left[\frac{1}{2},1\right]$ este integrabilă pe $[0,1]$ şi $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-2)\mathrm{d}x = -\frac{7}{8}$. Cum $f([0,1])=\{-2\}\cup\left[0,\frac{1}{2}\right)$ nu este interval, rezultă f nu admite primitive pe $[0,1]$. **47.** 1) Din studiul semnului derivatei $f'(x)=-\dfrac{12x^3}{(x^4+2)^2}$ rezultă că pe $(-\infty,0)$, f este strict crescătoare, iar pe $[0,\infty)$ f este strict descrescătoare. Deci pe $[0,2]$ f este strict descrescătoare; 2) Din $0\le x\le 2$ rezultă $f(0)=\frac{5}{2}\ge f(x)\ge f(2)=\frac{21}{18}$, iar de aici prin integrare rezultă inegalitatea dorită. **48.** Funcţia f are o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de forma: $F(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{ax}}{a\ln 2}+x+k_1, & x\le 1\\ \dfrac{ax^2}{2}+2x+k_2, & x>1,\ k_1,k_2\in\mathbb{R}.\end{cases}$ Se impune ca F să fie continuă şi apoi derivabilă în $x=1$. Găsim $2^a=a+1$ cu singurele soluţii $a=0$, $a=1$. **49.** 1) Funcţia f pe $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$ este continuă; 2) f nu are proprietatea lui Darboux pe $[0,1]$.

Altfel. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\in(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}+\begin{cases}0, & x\in(0,1)\\ -1, & x=0.\end{cases}$

3) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$. **50.** $a\in\mathbb{R}$, $b=1$. **51.** 1) $\alpha=2e$, $\beta=-e$; 3) $e+\frac{1}{e}+2$. **52.** $2-\ln 3-\frac{2}{e}-\frac{2}{e^2}$. **53.** 1) $n+8=27m$; 2) $m=\frac{1}{3}$, $n=1$;

3) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3+x, & x\le 2\\ \dfrac{x^4}{6}+\dfrac{11x}{3}-\dfrac{8}{3}, & x>2.\end{cases}$ **54.** Funcţia f este continuă pe [0,1].

Funcţia $F:[0,1]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\ln\sqrt{x^2+1}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0,\end{cases}$ este o

primitivă a lui f pe $[0,1]$. **55.** a) $x-\ln(x+1)+C$; b) $\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+C$; c) 0; $0\le\frac{x^n}{x+1}\le x^n$. **56.** 1) $c(b)=1-\sqrt{1-b}$; 3) 0; 4) $\frac{\sqrt{2}-1}{6}$. **57.** 1) $a=-\frac{1}{17}$, $b=\frac{4}{17}$; 2) $I_n=-\frac{1}{17}e^{-\frac{n\pi}{2}}+\frac{1}{17}$; 3) $\frac{1}{17}$. **58.** 1) $a=b=6$, $c=-11$; 2) $c=\frac{3}{11}$; 3) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+3x^2+6x, & x\in[-1,0)\\ -\frac{11}{3}x^3+3x^2+6x+4, & x\in[0,1].\end{cases}$

59. 1) $a=\frac{3}{e}$, $b=-2$; 2) 2(3-e). **60.** 1) $L_1=0$, $L_2=0$; 2) $I=\frac{2(\sin 1+\cos 1-1)}{e}-1$; 3) Se aplică şirul lui Rolle; ecuaţia are două soluţii, $x_1=0$, $x_2\in\left(\arccos\frac{1}{4},2\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)$. **61.** 3) Inegalitatea se scrie echivalent $0<\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{4}<\frac{\pi\sqrt{2}}{72}$. Conform teoremei lui Lagrange există $c\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right)$ astfel încât $\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{36}\cos c$. Evident $\frac{\pi}{36}\cos c>0$ şi $\cos c<\frac{\sqrt{2}}{2}$, adică $\frac{\pi}{36}\cos c<\frac{\pi\sqrt{2}}{72}$. **62.** 1) $x=2$, $y=-x-1$, $y=x+1$ sunt asimptote; 2) $f(x)\ge f(4)=4\sqrt{e}$, $\forall x>2$. **63.** a) $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -ax^2+x(2a-b)+b+2=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. De aici $a=-1$, $b=-2$. b) A se vedea paragraful 1.5. din volumul întâi. **64.** 1) $3-(x^2+3)e^{-x^2}$; 2) Funcţia $t\to(t+2)e^{-t^2}$, $t\in\mathbb{R}$, fiind continuă, admite primitive. Fie G o astfel de primitivă. Deci $F(x)=G(x^2)-F(0)$, iar de aici $F'(x)=2xG'(x^2)=2x(x^2+2)e^{-x^4}$. **65.** Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^*$ (produs de funcţii continue pe $(-\infty,0)$, şi funcţie elementară pe $[0,\infty)$), iar din $\lim\limits_{x\nearrow 0}e^x\sin x=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{x^2}{1+x}=f(0)=0$ se deduce că este continuă şi în $x=0$. Fiind continuă pe $\mathbb{R}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o astfel de primitivă. Avem: $F(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x), & x<0\\ \frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)-\frac{1}{2}, & x\ge 0.\end{cases}$

66. a) $f'(x)=3e^{3x}-1$; $f''(x)=9e^{3x}$; $f^{(n)}(x)=3^ne^{3x}$, $n\ge 2$ (inducţie matematică). b) Pentru $x\ge 0$, $f'(x)>0$, adică f este strict crescătoare. Deci dacă $x\ge 0$ rezultă $f(x)>f(0)=0$. c) Din b) rezultă $g\ge h$ şi deci $A(\Gamma_{g,f})=\int_0^1[e^x-e^{-2x}(x+1)]dx=e+\frac{5}{4e^2}-\frac{7}{4}$. **67.** a) Pentru $x\ne 0$, $f(x)=\left(\frac{x}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'$. Deci o primitivă F a lui f pe $(0,\infty)$ este $F(x)=\frac{x}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

b) O primitivă F a lui f pe $\mathbb{R}$ are forma $F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + k_1, & x > 0 \\ k_2, & x = 0 \\ \frac{x}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + k_3, & x > 0. \end{cases}$

Din cerinţa de continuitate a lui F în $x = 0$ rezultă $k_1 = k_2 = k_3$. Se pot lua egale cu zero. Trebuie ca $F'(0) = f(0) = k$. Avem $F'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

Altfel. Se scrie f sub forma

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases} + \frac{1}{2}\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ultimele două funcţii fiind continue pe $\mathbb{R}$.

c) $a_n = F(n) - F(-n) = \frac{n}{2}e^{-\frac{1}{n^2}} + \frac{n}{2}e^{-\frac{1}{n^2}} = ne^{-\frac{1}{n^2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

68. a) $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$. Cum pentru $x < 0$, $f'(x) < 0$, iar dacă $x > 0$, $f'(x) > 0$ se deduce că $x = 0$ este punct de minim pentru f când $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$. b) de la a). c) Dacă $x \in [0,1]$, atunci $\frac{1}{e} \leq e^{-x^2} \leq 1$. De aici $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Pentru inegalitatea a doua utilizăm a) şi b): Avem $e^{x^2} \geq x^2 + 1$, iar de aici $\frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2+1}$ sau $e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2+1}$, care integrată pe $[0,1]$ dă $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. **69.** a) Prin părţi.

$I_1 = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$; $I_2 = \int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

b) $0 \leq x^n \leq 1$, $x \in [0,1]$ implică $1 \leq 1 + x^n \leq 2$ pentru $x \in [0,1]$. De aici $0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln 2$ şi $0 \leq I_n \leq \ln 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De asemenea $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 [\ln(1+x^{n+1}) - \ln(1+x^n)]\mathrm{d}x \leq 0$ pentru că $x^{n+1} \leq x^n$ dacă $x \in [0,1]$ şi deci $1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$, $\ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$ şi în fine $\int_0^1 \ln(1+x^{n+1})\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$. **70.** A se vedea teorema fundamentală. **71.** Se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}x = t$. Se obţine valoarea $1 - \frac{\pi}{4}$ pentru integrală. **72.** a) Avem $f'(x) = -xe^x$, $f''(x) = -(1+x)e^x$. Deci $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$. Se pune $f^{(n)}(x) = (a_n + b_n x)e^x$ unde din f' şi f'' rezultă $a_1 = 0$, $b_1 = -1$, $a_2 = -1$, $b_2 = -1$. Avem $f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1} + b_{n+1}x)e^x$, iar pe de altă parte $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (a_n + b_n + b_n x)e^x$. De aici $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = b_n$. Acum $b_n = -1$, $a_{n+1} - a_n = -1$, ceea ce arată că (a_n) este o progresie aritmetică de raţie $r = -1$. Avem $a_n = a_1 + (n-1)r = 1 - n$. Deci $f^{(n)}(x) = (1 - n - x)e^x$. Din $f^{(n)}(0) < 2$ rezultă $n > -1$. Cum

$n \in \mathbb{N}^*$ rezultă $n \in \mathbb{N}^*$. b) $\int_0^x (1-t)e^t dt = (-t+2)e^t\Big|_0^x = (-x+2)e^x - 2$; $l_1 = 0$; $\int_x^{2x} f(t)dt = (-t+2)e^t\Big|_x^{2x} = (-2x+2)e^{2x} - (-x+2)e^x$; $l_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{(-2x+2)e^{2x} - (-x+2)e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x}\left[-2x+2+\frac{x-2}{e^x}\right] = \infty(-\infty) = -\infty$. **73.** 1) Ecuaţia $x^2+ax+b=0$ are rădăcina dublă $x=2$. Deci $\Delta = 0$ şi $4+2a+b=0$. De aici $a=-4$, $b=4$. 3) Aria este $\int_{-2}^{-1} f(x)dx - \int_{-1}^{0} f(x)dx$.

74. 1) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^*$, deoarece pe $(-\infty, 0)$ este definită printr-o funcţie elementară (polinomială), iar pe $(0,\infty)$ este produs de funcţii continue. Studiem continuitatea în $x=0$. Avem $\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0}(x^2-x) = 0 = f(0)$ şi $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = 0$. Deci f este continuă şi în $x=0$. În final f este continuă pe $\mathbb{R}$; 2) Se ştie că orice funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o astfel de primitivă. Deci

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + k_1, & x \le 0 \\ \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + k_2, & x > 0. \end{cases}$$

Legătura între constantele k_1, k_2 se determină din cerinţa de continuitate a lui F în $x=0$. Găsim $k_1 = k_2 = 0$. Acum $\int f(x)dx = F(x) + C$. **75.** b) $I_0 = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$, $I_1 = \sqrt{x^2+1} + C$, $I_2 = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$; $I_n = \int x^{n-1}(\sqrt{x^2+1})'dx = \frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+1} - \frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $n \ge 2$. **76.** a) Funcţia se scrie explicit astfel:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(\frac{1}{2}-x), & x < -\frac{1}{2} \\ -\ln(\frac{1}{2}-x), & x \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ -\ln(\frac{1}{2}+x), & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ \ln(\frac{1}{2}+x), & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$.

b) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ (compunere de funcţii continue) şi deci admite primitive pe $\mathbb{R}$. O primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, are forma

$$F(x)=\begin{cases} x\ln(\frac{1}{2}-x)-x-\frac{1}{2}\ln(1-2x), & x\le -\frac{1}{2} \\ -x\ln(\frac{1}{2}-x)+x+\frac{1}{2}\ln(1-2x)+1, & x\in[-\frac{1}{2},0] \\ -x\ln(\frac{1}{2}+x)+x-\frac{1}{2}\ln(2x+1)+1, & x\in(0,\frac{1}{2}] \\ x\ln(\frac{1}{2}+x)-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+1, & x>\frac{1}{2}. \end{cases}$$

77. Avem: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C=F(x)+C,\ x\in(-\pi,\pi).$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}=\begin{cases} F(x), & x\in(-\pi,\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x=\pi \\ F(x)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & x\in(\pi,3\pi) \end{cases} +C.$$

78. Se explicitează f, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,e-1] \\ x\ln(x+1), & x\in(e-1,2] \end{cases}$, funcţie continuă, deci integrabilă pe $[0,2]$, când $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{e-1} x\mathrm{d}x+\int_{e-1}^2 x\ln(1+x)\mathrm{d}x=\frac{3\ln 3}{2}+\frac{(e-1)^2}{4}-\frac{e}{2}+1$. **79.** Avem: $I_{n+1}-I_n=\int_1^e(\ln x)^n(\ln x-1)\mathrm{d}x\le 0$, deoarece $\ln x\le 1$, dacă $x\in[1,e]$. Cum $1\ge\ln x\ge 0$ pentru $x\in[1,e]$ rezultă $(\ln x)^n\in[0,1]$ şi $\int_1^e(\ln x)^n\mathrm{d}x\in[0,e]$. Integrând prin părţi se obţine $I_n=e-nI_{n-1}$; 3) Se scrie relaţia de recurenţă $\frac{1}{n}I_n=\frac{e}{n}-I_{n-1}$ şi se trece la limită; 0. **80.** 1) $a_k=\ln\frac{k+1}{k+2}+\ln 2$; 2) $b_n=\ln\frac{2}{n+2}$; 3) $-\infty$; 4) -1. **81.** 1) f continuă în $x=1\Leftrightarrow 1+a+b+c=0$, f derivabilă în $x=1\Leftrightarrow 2a+b+2=0$; f este de două ori derivabilă în $x=1\Leftrightarrow 6+2a=0$; $a=-3$, $b=4$, $c=-2$. 2) $\int_0^1(x^3+x^2+2x+3)\mathrm{d}x+\int_1^2\operatorname{arctg}(x-1)\mathrm{d}x=\frac{55}{12}-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}$. **82.** Se obţine $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1) \\ x^3, & x\in[1,2] \end{cases}$ şi deci $\int_0^2 e^x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x+\int_1^2 x^3e^x\mathrm{d}x=1+(2e^2+2e)=2e^2+2e+1$. **83.** a) $F_1(x)=-\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$; $F_2(x)=\frac{x}{4}\sin^4 x-\frac{1}{16}(1-\sin 2x+\frac{3x}{2}+\frac{\sin 4x}{8})+C=\frac{x}{4}\sin^4 x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{128}\sin 4x-\frac{3x}{32}+C$; b) $-\frac{3\pi}{32}+k=-\frac{3\pi}{32}\Rightarrow k=0$; c) $F_n(x)=\frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}F_{n-1}(x)+\frac{x\sin^{2n}x}{2n}-\frac{2n-1}{4n^2}x\sin^{2n-2}x+$

$\frac{\cos x \sin^{2n-1} x}{4n^2}$; Se exprimă F_n în funcţie de $I_n = \int \sin^{2n} x dx$ şi apoi se stabileşte o relaţie de recurenţă pentru I_n în care se înlocuieşte I_n funcţie de F_n.

84. a) Avem $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+2, & x \in (-\infty, -1] \cup [\frac{5}{2}, \infty) \\ -x^2+6x+7, & x \in (-1, \frac{5}{2}). \end{cases}$ Maximul a două funcţii continue este o funcţie continuă. Funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R} - \left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$; $f'_s(-1) = 1$, $f'_d(-1) = 8$, $f'_s(\frac{5}{2}) = 1$, $f'_d(\frac{5}{2}) = 8$. b) $x = -\frac{3}{2}$ punct de minim; c) $A = \int_{-3}^{-2} (x^2+3x+2)dx - \int_{-2}^{-1} (x^2+3x+2)dx + \int_{-1}^{\frac{5}{2}} (-x^2+6x+7)dx + \int_{\frac{5}{2}}^{3} (x^2+3x+2)dx = \frac{357}{8}$. **85.** Avem $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ şi $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin \sqrt{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2t\sqrt{\sin^2 t \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \sin 2t dt = \frac{1}{4}$, unde am notat $t = \arcsin \sqrt{x}$ şi apoi ultima integrală se calculează prin părţi. **Altfel.** Se face schimbarea de variabilă $\sin^2 x = t$. **86.** Pe intervalul $\left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right]$, f are expresia $f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n+2} \\ (n+1)x, & x \in (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}] \\ nx, & x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$

b) Se iau funcţiile $f_1 : [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = (n+1)x$, $f_2 : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = nx$, care sunt continue şi deci integrabile. Cum $f_1(x) = f(x)$, $x \in (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$ se deduce că f este şi ea integrabilă pe $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}]$ şi $\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} f_1(x)dx$. Analog din $f(x) = f_2(x)$, $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ se obţine că f este integrabilă pe $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ şi $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f_2(x)dx$. Din f integrabilă pe $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}]$ şi pe $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ rezultă f integrabilă pe $[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}]$ şi $\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} f_1(x)dx + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f_2(x)dx = \frac{4n^3+14n^2+15n+4}{2n(n+1)^2(n+2)^2}$. c) Pentru $x > 1$, avem $[\frac{1}{x}] = 0$ şi deci $f(x) = 0$, $\forall x > 1$. Funcţia fiind continuă admite primitive. O astfel de primitivă $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$. **87.** a) Din $f'_n(x) = x^{n-1}e^{1-x}(n-x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă f_n crescătoare şi deci $0 \leq x \leq 1$ dă $f_n(0) = 0 \leq f_n(x) \leq f_n(1) = 1$. b) Integrând prin părţi

se obţine $I_n = -1 + nI_{n-1}$, $n \geq 2$, unde $I_1 = e - 2$. c) Din $0 \leq f_n(x) \leq 1$ se deduce prin integrare $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$.

88. a) $\lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{1}{(1+t^2)^2} \lim\limits_{t \searrow 0} t \ln t = 0 = f(0)$. Deci f este continuă la dreapta în $t = 0$. b) Punând $u(t) = \ln t$, $v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ şi integrând prin părţi rezultă $I_n = -\dfrac{\ln n}{2(1+n^2)} + \ln \dfrac{n^2}{1+n^2} + \dfrac{1}{4}\ln 2$. c) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{1}{4}\ln 2$. **89.** 2) Din 1) se obţine $x - 1 \leq x \ln x \leq x(x-1)$ sau $e^{x-1} \leq x^x \leq e^{x(x-1)}$. Prin integrare rezultă $\int_a^b e^{x-1}\mathrm{d}x \leq \int_a^b x^x \mathrm{d}x \leq \int_a^b e^{x(x-1)}\mathrm{d}x$, iar aici $\int_a^b e^{x-1}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{e}\int_a^b e^x \mathrm{d}x = \dfrac{1}{e}(e^b - e^a)$ şi $\int_a^b e^{x(x-1)}\mathrm{d}x = \int_a^b e^{x^2}e^{-x}\mathrm{d}x \leq \int_a^b e^{b^2}e^{-x}\mathrm{d}x = e^{b^2}(e^{-a} - e^{-b})$. **90.** 1) $I_0 = \ln 2$; $I_1 = 1 - \ln 2$; 2) $I_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n(x-1)}{x+1}\mathrm{d}x \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Şirul (I_n) fiind descrescător şi mărginit inferior rezultă şir convergent. Din $I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$ se deduce prin trecere la limită $\lim\limits_n I_n = 0$. **Altfel,** din $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$, via criteriul „cleştelui", se obţine $\lim\limits_n I_n = 0$.' **91.** 1) Cum $\ln \dfrac{1}{1-x} - F(x) = \int_0^x \dfrac{1}{1-t}\mathrm{d}t - \int_0^x \dfrac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \geq 0$ deoarece $\dfrac{t^n}{1-t} \geq 0$, $t \in [0,1)$, adică prima inegalitate. Pe de altă parte $\dfrac{t^n}{1-t} \leq \dfrac{x^n}{1-x}$ dacă $t \in [0,x]$, conduce la $\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \dfrac{x^n}{1-x}\mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. 2) Din $\dfrac{1-t^n}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$ prin integrare pe $[0,x]$ se obţine relaţia dorită. 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k \cdot 2^k} = F\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Din 1) avem (prima inegalitate) $F\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq \ln 2$, (1) iar din a doua inegalitate $F\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq \ln 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Trecând aici la limită după $n \to \infty$ se obţine $F\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq \ln 2$, (2). Din (1) şi (2) avem limita egală cu $\ln 2$.

92. 1) Avem $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ \dfrac{2}{1+x^2}, & x \in (1,2]. \end{cases}$ Se impune derivabilitatea în $x = 1$. Găsim $f'_s(1) = 1 \neq f'_d(1) = -1$. Deci $A = \{1\}$ şi răspunsul corect este cel indicat la B. 2) D.

93. Avem: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x+1}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{x-1}{2x}, & x \in [1,2) \\ 0, & x = 2. \end{cases}$ 1) Funcţia f nu este continuă în punctele $x = 1$ şi $x = 2$. Deci $S = 3$, răspuns indicat la D. 2) C. **94.** 1) Dacă $x \in [n, n+1)$, atunci $[x] = n$ şi f se scrie $f(x) = \dfrac{n}{x^2+3nx+2n^2}$, iar $f(n+1) = \dfrac{1}{6(n+1)}$. Se găseşte uşor $a_n = \ln \dfrac{4(3n+1)}{3(4n+1)}$, iar $L = 0$, adică răspunsul din E.

2) Dacă $x \nearrow 2$, atunci $[x] = 1$ şi deci $f(2-0) = \dfrac{1}{12}$, iar pentru $x \searrow 2$ avem $[x] = 2$ şi $f(2+0) = \dfrac{1}{12}$. Acum $\alpha = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$, adică C. **95.** $f(x) = e^{x-3}$; b); **96.** a) $\sqrt{1+t} = x$; $\ln \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+1} + \dfrac{1}{2}\ln 2 + \operatorname{arctg}\sqrt{n+1} - \dfrac{\pi}{4}$; b) $\ln\sqrt{2} + \dfrac{\pi}{4}$; **97.** e); **98.** e); **99.** $\dfrac{F'(x)}{F(x)} = 2x$, care integrată dă $F(x) = ce^{x^2}$, $f(x) = 2cxe^{x^2}$. Din condiţie rezultă $f(x) = 8xe^{x^2}$. 1) $T = f(1) = 8e$; b); 2) d); **100.** 1) $f(x) = (1-x)^2$ dacă $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $f(x) = x^2$ dacă $x \in (\dfrac{1}{2}, 1]$; c) 2) d); **101.** 1) $\Delta < 0$; c); 2) d).

102. a) f este continuă pe $\mathbb{R}$; b) $\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{6}$, $x < 1$; $\dfrac{1}{2}(x - \dfrac{1}{2})\sqrt{x^2-x} - \dfrac{1}{8}\ln(x - \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2-x}) + \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1}{2}$, $x \geq 1$; **103. I. 1.** $D = [-1, \infty)$, $y = 0$ a.o. la $+\infty$, $f(-1) = \sqrt{2}$, $f(0) = \sqrt{3} - 1$, $f'_d(-1) = -\infty$, $f''(x) > 0$; **2.** Dacă $a + b + 1 = 0$, atunci $a = -b - 1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} [b(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) + (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})] = 0 + 0 = 0$. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, atunci $a + b + 1 = \lim\limits_{x\to\infty}(a + b\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}} + \sqrt{\dfrac{x+3}{x+1}}) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}} = 0$; **II. 1.** Se integrează prin părţi; $\ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$; **2.** Din $0 \leq \ln(1+t) \leq t$, $\forall t \geq 0$, rezultă $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$; 0; **104. 1.** i) $f'(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{2x^2}$; f este descrescătoare pe $[0, a]$ şi crescătoare pe $[a, \infty)$; ii) $x_n \geq a$, $\forall n$; $x_{n+1} - x_n \leq 0$, $\forall n$; a; **2.** i) Se integrează prin părţi; $I_1 = 1$, $I_2 = e - 2$; ii) $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$; iii) Pentru $x \in [0,1] \Rightarrow x^n \leq 1 \Rightarrow I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 e^x dx = e - 1$; **105.** e); **106. 1.** c); **2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^6+1}}$ este descrescătoare pe $[2, \infty)$ şi deci $\dfrac{2x+1}{\sqrt{(2x)^6+1}} \leq f(t) \leq \dfrac{x+1}{\sqrt{x^6+1}}$, $\forall t \in [x, 2x]$; $\lim\limits_{x\to\infty} \int_x^{2x} f(t)dt = 0$; Se

aplică l'Hospital (unde $\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = F(2x) - F(x)$, unde F este o primitivă a lui f); $\frac{1}{2}$; **108.** a) $I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$; b) $x = \frac{\pi}{2} - t$, $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m t}{\cos^m t + \sin^m t}\mathrm{d}t$. Deci $I_m + I_m = \frac{\pi}{2}$. De aici $I_m = \frac{\pi}{4}$; **109.** a) $\frac{1}{(1+x)^5} < \frac{1}{1+x^5} < \frac{1}{x^5}$; d); b) a); **110.** **1.** $D = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$; $E = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right\}$; f este crescătoare pe intervalele $(-\infty, -1]$, $\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2}\right]$ şi descrescătoare pe intervalele $\left[-1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$, $[0, \infty)$; **2.** Se integrează prin părţi, $I = \int (e^{\mathrm{arctg}x})' \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$; $\frac{1}{2}e^{\mathrm{arctg}x} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. **111.** $F(x) = G(x) - G(0)$, unde G este o primitivă a lui $f(x) = \mathrm{e}^x \ln(1 - x + x^2)$. Avem $F(x)' = G(x)' = \mathrm{e}^x \ln(1 - x + x^2)$; $x = 0$ punct de maxim, $x = 1$ punct de minim; a); **112.** $x^2 + ax + b - (x^2 + bx + a) = (a - b)(x - 1)$; $f(x) = x^2 + ax + b$, $x \leq 1$, $f(x) = x^2 + bx + a$, $x > 1$; $f(-1) = 4$, $f(2) = 9 \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$, $b = \frac{8}{3}$; d). **113.** $I_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \mathrm{arctg}nc_n$, $c_n \in \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$; c). **114.** $\frac{1}{2}\int_n^{n+1} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \leq I_n \leq \frac{1}{2}\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$; Altfel se poate aplica formula de medie pentru I_n. **115.** Se aplică l'Hospital; e).

pag. 269. Testul I. 1. a) $\det(A) = 0$ (Se adună liniile 2 şi 3 la prima linie), $\mathrm{rang}(A) = 2$ (există un minor de ordinul doi nenul); b) $\mathrm{rang}(aA + bB) = 3 \Leftrightarrow \det(aA + bB) \neq 0 \Leftrightarrow -21a^2b \neq 0 \Leftrightarrow ab \neq 0$; d) $AB = BA =)_3$; f) Din c) şi e) $\Rightarrow c^n = a^n 6^{n-1} A + b^n (-6)^{n-1} B$; **2.** a) $b_0 = 1$, $q_0 = \frac{1}{2}$; $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 1$; b) $T_n = 2[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}]$, $S_n = T_n - n^2$, $T_n \to 2$, $S_n \to -\infty$; **II. 1.** Se explicitează funcţia max şi se rezolvă pe cazuri; **2.** Fie evenimentele $A =$„elev pasionat de matematică“, $B =$„elev pasionat de limbi străine“. Atunci $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$; a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{5}$; b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{10}$; c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{10}$; **3.** a) $(1 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$, $a_n = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n]$, $b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n]$; b) $\sqrt{3}$; **III.**

1. a) $\pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{a}{2}$; d) $\frac{\pi}{2}$; **2.** a) $A(0,1)$, $B(2,3)$; b) $x+y-3=0$;; c) $\lambda = 0;\ 3$; **3.** $2x - 3z - 27 = 0$; **IV. 1.** Continuă în $x = -1$, $x = 2$; nu este derivabilă în nici un punct; **2.** a) $u_1 = 1$, $u_2 = e^2$; b) Din $f(0) = 1$ şi $f(1) = e^2 \Rightarrow a = 1$, $b = 2$. **Testul 2. I. 1.** $(-1,1)$; **2.** a) $a < -1$, $x = 1$; $a = -1$, $x \in [-3,1]$; $a \in (-1,1)$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{a+7}{a-1}$; $a = 1$, $x \in [1,\infty)$; $a > 1$, $x = 1$; b) $\sqrt[3]{x-1} = a$, $\sqrt[3]{27-14x} = b$; $x_1 = -7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$; c) $z_1 = \frac{1-i}{2}$, $z_2 = 3+2i$; **3.** a) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $(\widehat{1},\widehat{2},\widehat{5})$ şi toate permutările; c) $\Delta = m(1-m)(1+m)$; $m = 0$, sistem incompatibil; $m = 1$, $(1,-\lambda,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $m = -1$, $(\lambda,1,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; **II. 1.** $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$, $f'(x) > 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi f strict crescătoare pe $(0,\infty) \Rightarrow f(x) < 0$, $\forall x > 0$; **2.** a) $a = b = 1$, $c = -\frac{1}{2}$; b) $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$; $a = 3$, $b = -2$, $c = 11$; $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare ($\Rightarrow f$ injectivă); $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow f$ surjectivă; $(f^{-1})'(-11) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$; **3.** b) Se utilizează a) sub forma $\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$ pentru fiecare termen din membrul stâng; **III. 1.** a) $A(4,0)$; b) $x - 3y - 4 = 0$; c) $B(0,2)$, $C(1,-1)$; 5; **2.** a) 20; b) 900π, 2000π; c) $\frac{1}{4}$; **3.** $a = -3$, $b = \frac{9}{2}$; **IV. 1.** $a_1 = b_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 1$; **2.** a) $y = -2$ a.o. la $-\infty$, $y = 0$ a.o. la $+\infty$; b) $(-1,\infty) - \{0\}$; c) Dacă $x_1 = x_0$, atunci $x_n = x_0$, $\forall n \ge 1$. Din $x_1 = x_0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$ cu soluţiile $x_0 \in \{0,-1\}$; dacă $x_0 = 0 \Rightarrow x_n = 0$, $\forall n$, iar dacă $x_0 = -1$, atunci $x_n = -1$, $\forall n$; d) Inducţie matematică; e) Din d) $\Rightarrow 0 \le x_{n+1} + 1 \le \frac{1}{(\sqrt{x_0^2+1})^{n+1}}(x_0^2+1)$; $\lim x_n = -1$; **Testul 3. I. 1.** a) $x \in \{5, \sqrt[5]{5}\}$; b) $[-1,2] - \{0\}$; c) $(-\infty, \log_3 a - 2)$; **2.** a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} = q$, $b_{n+1} - b_n = -\ln 3 = r$; $a_1 = \frac{1}{3}$, $b_1 = -\ln 3$; 2) $\lim s_n = \frac{1}{2}$, $\lim t_n = -\infty$; **3.** a) $n = 8$; b) $k \in \{0,4\}$; **II. 1.** $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$; **2.** a) $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; b) $\mathbb{R}$; o soluţie; c) $x = -1$ punct de inflexiune; **3.** a) $\ln\frac{x^2}{x+1} + \frac{6}{x+1} + C$; b) (1^∞); $-\frac{3}{2}$; c) $\frac{16}{3}$; **III. 1.** a) $A(2,2)$; b) $A \in d_3$; c) $r = OA = 2\sqrt{2}$; $x^2 + y^2 - 8 = 0$; **2.** $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, $3\sqrt{3}$; **3.** $(2,-3,6)$; **IV. 1.** a) $I_0 = \ln\frac{4}{3}$, $I_1 = 1 - 3\ln\frac{4}{3}$; b) $I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$; c) $x \in [0,1] \Rightarrow x^{n+1} \le x^n \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{x+3} \le \frac{x^n}{x+3}$, care se integrează pe $[0,1]$; e) Se utilizează d); **2.** a) $(x*y)*z = x*(y*z)$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$; b) $x*4 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

V. ECUAŢII DIFERENŢIALE SIMPLE *

5.1. Introducere

Acest capitol este o dezvoltare a calculului diferenţial şi integral. Pentru abordarea lui se impune cunoaşterea elementelor ce ţin de derivare şi integrare. Pentru raţiuni practice sunt utilizate cele mai curente notaţii ale derivatelor y' sau $\frac{dy}{dx}$ şi y'' sau $\frac{d^2y}{dx^2}$ (S-a văzut la Analiza matematică din anul precedent că diferenţiala dy a funcţiei y este produsul dintre derivata funcţiei y şi diferenţiala argumentului dx, adică $dy = y' \cdot dx$).
Funcţiile trigonometrice şi exponenţiale au un rol important în cadrul acestui capitol şi deci derivatele şi primitivele lor se impun a fi cunoscute.
Ecuaţiile diferenţiale sunt un subiect de analiză matematică foarte important, având aplicaţii în cadrul matematicii precum şi în alte domenii ale ştiinţelor (fizică, chimie, biologie, etc.)

Definiţie. Se numeşte **ecuaţie diferenţială** o relaţie între o variabilă independentă x, funcţia căutată $y = y(x)$ şi derivatele sale $y', y'', \ldots, y^n$, de forma
$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0.$$

Dacă funcţia căutată $y = y(x)$ este o funcţie de o singură variabilă x, ecuaţia diferenţială se numeşte **ordinară**.

Exemple de modelare prin ecuaţii diferenţiale a unor fenomene din domeniul ştiinţific, economic, social.

Iată câteva exemple de ecuaţii diferenţiale întâlnite în liceu.

1) $f' + kf = 0$ (**ecuaţia dezintegrării substanţelor radioactive**; $f(t)$ reprezintă cantitatea de substanţă radioactivă la momentul t, iar $k > 0$ este un coeficient de proporţionalitate al dezintegrării substanţei respective; $f'(t)$ reprezintă viteza de dezintegrare radioactivă).

* Se adresează claselor cu o oră în plus la trunchiul comun

2) $\frac{d^2y}{dt^2} = 9,8$ **(ecuaţia căderii unui corp în apropierea suprafeţei Pământului).**

3) $mf''(t) = F$ **(legea a doua a lui Newton;** dacă mişcarea se face pe o axă, atunci notând $f(t)$ poziţia punctului material (de masă m) la momentul t, viteza de deplasare la momentul t este $f'(t)$ şi acceleraţia este $f''(t)$; F reprezintă forţa care acţionează asupra punctului, ea depinzând în fiecare moment t de poziţia $f(t)$ a punctului şi de viteza $f'(t)$ a acestuia).

4) $2\theta'' = -9,8 \cdot \sin\theta$ **(ecuaţia pendulului matematic;** θ depinde de timpul t şi este unghiul format de firul inextensibil cu verticala).

5) $\frac{dP}{dt} = 0.01 \cdot P - (0,0001)P^2$ **(ecuaţia corespunde unui model demografic;** P fiind funcţie de timp şi reprezintă numărul de indivizi la momentul t).

6) $Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t)$ (descrie evoluţia unui circuit electric supus unei tensiuni $E(t)$, circuit care conţine o rezistenţă R, o inductanţă L, un condensator de capacitate C, toate legate în serie; $q(t)$ reprezintă sarcina electrică a condensatorului la momentul t; $q'(t) = I(t)$ este intensitatea curentului în circuit la momentul t).

Termenul de ecuaţie sugerează adesea ideea de soluţie. În ciuda varietăţii metodelor de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale, există numeroase ecuaţii care nu pot fi rezolvate complet.
Este necesară deci o clasificare a ecuaţiilor diferenţiale, pentru a vedea, funcţie de tip, ce metodă poate fi utilizată pentru rezolvarea ei.

> **Definiţie.** Se numeşte **ordinul ecuaţiei diferenţiale**, cel mai mare dintre ordinele derivatei care figurează în ecuaţie.

În exemplele prezentate mai sus ecuaţiile numerotate 1), 5) sunt de ordinul întâi, iar celelalte 2), 3), 4), 6) sunt de ordinul doi.

5.2. Soluţiile ecuaţiilor diferenţiale

Am întâlnit noţiunea de soluţie relativ la ecuaţii algebrice, trigonometrice, vectoriale, matriciale. Prin analogie, ar trebui ca soluţie pentru o ecuaţie diferenţială să fie o funcţie (având un număr de derivate) pentru care ecuaţia să fie verificată. Numai că situaţia nu este întotdeauna simplă cum se poate vedea în cazul ecuaţiei de ordinul întâi

$$f'(x) + 0,03f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Se vede imediat că $f(x) = 2e^{-0,03x}$ verifică ecuaţia, dar şi funcţia $\varphi(x) = ce^{-0,03x}$, $c \in \mathbb{R}$ verifică aceeaşi ecuaţie. Cum c este variabil din $\mathbb{R}$, funcţia φ descrie o vastă familie de soluţii. O astfel de soluţie $\varphi = \varphi(x, c)$ se numeşte **soluţie generală** a ecuaţiei diferenţiale.

Definiţie. Se numeşte **soluţie a unei ecuaţii diferenţiale** de ordin n pe un interval (a, b) o funcţie $y = \varphi(x)$ definită pe acest interval cu derivatele sale până la ordinul n şi pentru care substituind $y = \varphi(x)$ în ecuaţia diferenţială, aceasta devine o identitate în raport cu x din (a, b).

A determina **toate** funcţiile care sunt soluţii ale unei ecuaţii diferenţiale înseamnă a rezolva această ecuaţie diferenţială.

Se numeşte **soluţie particulară** a unei ecuaţii diferenţiale, o soluţie obţinută plecând de la soluţia generală $\varphi(x, c)$ pentru o valoare oarecare determinată a constantei arbitrare c.

A găsi o soluţie particulară, deci o funcţie $y = y(x)$ care satisface o ecuaţie diferenţială şi în acelaşi timp una sau mai multe condiţii suplimentare se spune că **se rezolvă o ecuaţie diferenţială cu condiţii iniţiale sau că se rezolvă o problemă Cauchy.**

5.3. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

Definiţie. Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi este

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

unde $y = y(x)$ este funcţie derivabilă definită pe (a, b).

Soluţie a ecuaţiei (1) este o funcţie $y : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivabilă care verifică (1) pentru orice $x \in (a, b)$.

Problema lui Cauchy în acest caz înseamnă a determina o soluţie $y = y(x)$, care verifică (1) şi în plus satisface condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$ pentru x_0 din (a, b).

Vom prezenta două tipuri importante de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

1) Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile;
2) Ecuaţii diferenţiale liniare.

5.3.1. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile

Formal o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile este de tipul $y' = f(x)g(y)$, unde f, g sunt funcţii continue.
Vom neglija o abordare teoretică a acestei probleme, dar diferitele dificultăţi le vom ilustra prin probleme.

> Pentru a rezolva această ecuaţie trebuie înmulţiţi sau împărţiţi ambii membrii ai ecuaţiei printr-o expresie astfel încât să se obţină un membru depinzând numai de x, iar celălalt membru să depindă numai de y (**se spune că am separat variabilele în cei doi membrii**) şi apoi se integrează ambii membrii.

Împărţirea ambilor membrii ai ecuaţiei printr-o expresie conţinând necunoscutele x şi y **poate conduce la pierderea de soluţii** care anulează această expresie.

Primul pas al rezolvării acestei ecuaţii este de a separa variabilele în ecuaţia dată, rescriind-o (utilizând notaţia cu diferenţială $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$) sub forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x.$$

Al doilea pas este de integrare a fiecărui membru (acest lucru este posibil teoretic dacă de exemplu f, g sunt continue pe un interval (a, b) şi dacă g nu se anulează pe acest interval).
Se obţin atunci soluţiile ecuaţiei diferenţiale sub forma

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

În particular dacă $g(y) = y$, atunci de aici deducem (x_0 fixat din (a, b), iar $x \in (a, b)$ oarecare)

$$\ln|y| = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + c \text{ sau } |y| = e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t} \cdot e^c \text{ sau } (\pm e^c = k)$$

$$y = ke^{\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t}, \; k \in \mathbb{R}.$$

Această exprimare a lui y dă ceea ce se cheamă **soluţia generală** a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x)y$.

Exemple. 1) $y' = f(x)$, unde f este continuă pe (a, b).
R. O soluţie a acestei ecuaţii diferenţiale este de fapt o primitivă a funcţiei f.

2) Să se rezolve ecuaţia $x^2y^2y' + 1 = y$.

R. Se aduce ecuaţia la forma $x^2y^2\dfrac{dy}{dx} = y - 1$ sau $x^2y^2dy = (y-1)dx$.

Împărţim ambii membrii ai ecuaţiei prin $x^2(y-1)$ şi avem: $\dfrac{y^2}{y-1}dy = \dfrac{dx}{x^2}$.

Astfel am separat variabilele în cei doi membrii.

Se integrează ambii membrii ai ecuaţiei şi rezultă

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{dx}{x^2} \text{ sau } \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

Împărţirea ambilor membrii prin $x^2(y-1)$ conduce la pierderea soluţiilor $x = 0$ şi $y - 1 = 0$, adică $y = 1$. Este clar că $y = 1$ este soluţie a ecuaţiei, în timp ce $x = 0$ nu verifică ecuatia dată.

Observaţie. De obicei asupra soluţiei unei ecuaţii cu variabile separabile se impune o anumită condiţie $y(x_0) = y_0$, de unde se determină constanta C.

Probleme rezolvate

1°) $y' = x$, $y(0) = 1$.

Scriem ecuaţia diferenţială utilizând diferenţialele

$$\frac{dy}{dx} = x \text{ sau } dy = xdx.$$

Integrând ultima egalitate deducem $y = \dfrac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$, forma soluţiei generale. Din condiţia $y(0) = 1$ rezultă $1 = c$ şi găsim soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$.

2°) Să se rezolve ecuaţia diferenţială $y' = xy - x$ dacă $y(0) = 3$.

R. Se scrie ecuaţia sub forma $\dfrac{dy}{dx} = x(y-1)$ şi apoi se separă variabilele aducând-o la forma $\dfrac{dy}{y-1} = xdx$.

Integrând cei doi membrii avem $\ln(|y-1|) = \dfrac{x^2}{2} + c$.

Ţinând cont de $y(0) = 3$, din ultima egalitate rezultă $\ln(3-1) = c$.

Deci soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale este

$\ln(|y-1|) = \dfrac{x^2}{2} + \ln 2$ sau $|y-1| = 2e^{\frac{x^2}{2}}$ sau $y = 1 + 2e^{\frac{x^2}{2}}$.

3°) Să se rezolve ecuaţia diferenţială $y' = y^2$.

R. Se scrie ecuaţia sub forma $\frac{dy}{dx} = y^2$ sau $\frac{dy}{y^2} = dx$, iar de aici prin integrarea celor doi membrii $\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$ sau $-\frac{1}{y} = x + c$ sau încă $y = -\frac{1}{x+c}$.

Acest exemplu ilustrează faptul că o soluţie a ecuaţiei s-a pierdut în urma separării variabilelor (am împărţit prin y^2, deci $y \neq 0$). Într-adevăr $y(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale $y' = y^2$, dar care nu se regăseşte sub forma $y = -\frac{1}{x+c}$ pentru o alegere particulară a constantei c. O astfel de soluţie, cum este $y(x) = 0$ pentru ecuaţie, se numeşte **soluţie singulară**, căci ea nu aparţine soluţiei generale pentru un anume c.

4°) Să se rezolve ecuaţia diferenţială $y' = -\frac{x}{y}$.

R. Acest exemplu conţine ilustrarea geometrică a unei ecuaţii diferenţiale şi a soluţiilor sale. Nu întotdeauna acest lucru este posibil, dar o asemenea abordare vine să ajute la înţelegerea semnificaţiei ecuaţiilor diferenţiale şi a soluţiilor acestora.

Precizăm că un punct în planul cartezian este dat prin coordonatele sale notate obişnuit prin (x, y); un punct al graficului unei funcţii are coordonatele $(x, f(x))$, iar $f'(x)$, derivata lui f în x, reprezintă panta tangentei la graficul lui f în punctul de coordonate $(x, f(x))$.

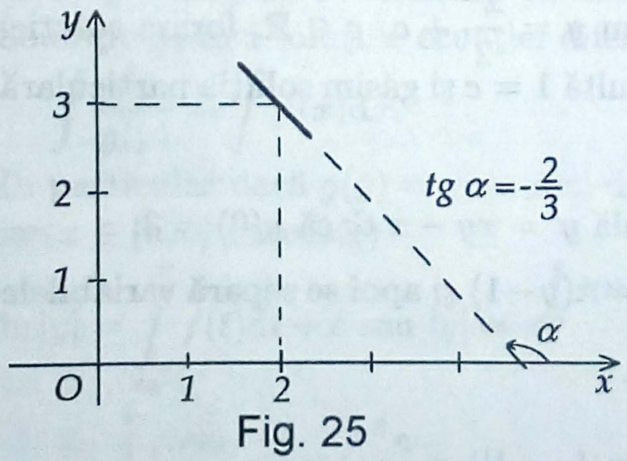


Fig. 25

Egalitatea $y' = -\frac{x}{y}$ dă o condiţie geometrică pentru fiecare punct al planului (cu excepţia celor cu $y = 0$).

De exemplu dacă graficul unei soluţii a ecuaţiei diferenţiale trece prin punctul $(2, 3)$, atunci tangenta la graficul acestei soluţii în acest punct trebuie să aibă panta $y' = -\frac{2}{3}$ (fig. 25)

Interpretând astfel ecuaţia diferenţială pentru fiecare punct al planului, se obţine ceea ce se numeşte **câmpul direcţiilor tangentelor** (fig. 26). Este imposibil de a desena toate tangentele, dar un număr relativ restrâns de astfel de tangente ne permite de a avea o bună idee a ceea ce ecuaţia diferenţială impune ca şi condiţii geometrice pentru graficele soluţiilor.

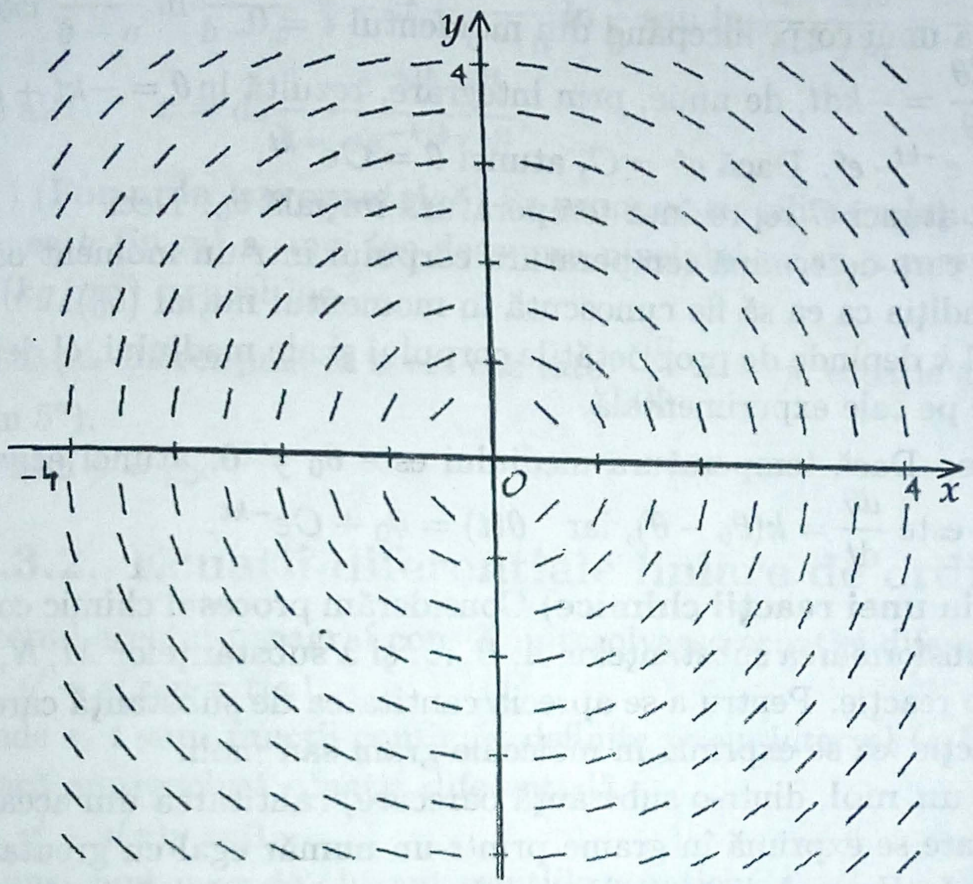


Fig. 26

În fig. 26 este ilustrat câmpul direcţiilor obţinut când x şi y parcurg multiplii de 0,5 între -4 şi $+4$.

La o primă vedere se vede că acest desen prezintă o simetrie centrală în jurul originii. Cum graficele trebuie întotdeauna să aibă tangente micile segmente desenate, soluţiile grafice pe care le sugerează desenul sunt cercuri centrate în $(0,0)$. Ne rămâne să verificăm acest lucru analitic.

Cercul de centru $(0,0)$ şi rază r are ecuaţia $x^2+y^2=r^2$.

Acestei relaţii îi corespund două funcţii derivabile

$$y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2} \text{ şi } y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2},$$

având derivatele: $y_1'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ şi $y_2'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

Acum se verifică uşor că $y_1'=-\dfrac{x}{y_1}$ şi $y_2'=-\dfrac{x}{y_2}$, cu alte cuvinte aceste funcţii sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale considerate $y'=-\dfrac{x}{y}$.

5°) (**Legea răcirii**) Fie un corp care se răceşte, cu temperatura $\theta°\,C$, înconjurat cu temperatura de $0°\,C$. Newton a stabilit legea după care viteza de răcire este proporţională cu temperatura θ, adică

$$\frac{d\theta}{\mathrm{d}t}=-k\theta,$$

în care k este o constantă pozitivă. Să determinăm legea după care scade

temperatura unui corp, începând din momentul $t = 0$.

R. Avem $\frac{d\theta}{\theta} = -kdt$, de unde, prin integrare, rezultă $\ln\theta = -kt + c$.
De aici $\theta = e^{-kt} \cdot e^c$. Dacă $e^c = C$, atunci $\theta = Ce^{-kt}$.
Dacă $t = 0$, atunci C reprezintă temperatura inițială θ_0. Deci $\theta = \theta_0 e^{-kt}$, care determină temperatura corpului într-un moment oarecare, cu condiția ca ea să fie cunoscută în momentul inițial (θ_0).
Coeficientul k depinde de proprietățile corpului și ale mediului, el determinându-se pe cale experimentală.

Observație. Dacă temperatura mediului este $\theta_0 \neq 0$, atunci ecuația diferențială este $\frac{d\theta}{dt} = k(\theta_0 - \theta)$, iar $\theta(t) = \theta_0 + Ce^{-kt}$.

6°) (Ecuația unei reacții chimice) Considerăm procesul chimic constând din transformarea substanțelor $A, B, \ldots$ și a substanțelor $M, N, \ldots$ care intră în reacție. Pentru a se aprecia cantitatea de substanță care ia parte la reacție, ea se exprimă în molecule-gram sau moli.
Se numește **un mol**, dintr-o substanță oarecare, cantitatea din această substanță care se exprimă în grame printr-un număr egal cu greutatea sa moleculară. Un mol dintr-o substanță oarecare conține întotdeauna același număr de molecule, indiferent de substanță.
Dacă se presupune că intră în reacție pentru fiecare moleculă dintr-o substanță câte o moleculă din cealaltă, la fiecare mol dintr-una revine un mol din cealaltă. După trecerea timpului t de la începutul reacției, din fiecare din substanțele care interacționează intră în reacție același număr x de moli. Viteza cu care crește x în raport cu timpul, adică derivata $\frac{dx}{dt}$, se numește viteza de reacție chimică. Presupunem că la proces participă două substanțe A și B, ale căror cantități (în moli) le vom nota cu a și b (presupunem $b > a$). După un interval de timp t, vom avea cantitatea $(a - x)$ de substanță A și cantitatea $(b - x)$ de substanță B.
Presupunem că viteza reacției chimice în momentul t este proporțională cu produsul maselor care intră în reacție, adică cu produsul cantităților de reactivi, care încă n-au fost supuse transformării. Aceasta conduce la ecuația diferențială $\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$ sau $\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt$.
De aici, prin integrare $\frac{1}{b-a} \ln\frac{a-x}{b-x} = -kt + C$.
Cum pentru $t = 0$ trebuie să avem $x = 0$ rezultă $C = \frac{1}{b-a} \ln\frac{a}{b}$.

Deci $\frac{1}{b-a}\ln\frac{a-x}{b-x} = -kt + \frac{1}{b-a}\ln\frac{a}{b}$ sau $\ln\frac{(a-x)b}{(b-x)a} = -k(b-a)t$, iar de aici $x = ab\frac{1-e^{-k(b-a)t}}{1-ae^{-k(b-a)t}}$.

7°) (**Formula barometrică**) Se propune stabilirea relaţiei dintre înălţimea h (în m) a unui loc deasupra nivelului mării şi presiunea aerului p (kg/m^2) în acel loc.

Ecuaţia diferenţială în acest caz este $\frac{dp}{dh} = -kp$, ecuaţie analoagă celei din 5°).

Găsim $p = p_0e^{-kh}$.

4.3.2. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Scopul acestui paragraf constă în rezolvarea ecuaţiei diferenţiale

$$y' + s(x)y = t(x), \qquad (1)$$

unde s, t sunt funcţii continue, definite pe un interval (a, b).

Dacă am rezolvat ecuaţia diferenţială

$$y' + s(x)y = 0,$$

atunci sunt uşor de obţinut soluţiile ecuaţiei (1).

Vom prezenta două metode pentru rezolvarea ecuaţiei (1).

Prima metodă (Metoda soluţiei particulare)

Această metodă este uşor de utilizat în cazurile în care funcţiile s şi t au forme convenabile.

Rezolvarea ecuaţiei $y' + s(x)y = 0$ se poate face aşa cum s-a văzut la 4.3.1. (ecuaţii diferenţiale cu variabile separate).

Utilizând acest rezultat este suficient de a găsi **o soluţie particulară** a ecuaţiei (1) pentru **a le cunoaşte pe toate.**

Într-adevăr dacă y_p este o astfel de soluţie pentru (1), adică

$$y_p' + s(x)y_p = t(x), \qquad (2)$$

iar y este o soluţie oarecare pentru (1), adică

$$y' + s(x)y = t(x), \qquad (3),$$

atunci din (2) şi (3) prin scădere rezultă

$$(y - y_p)' + s(x)(y - y_p) = 0.$$

Aceasta arată că $y - y_p$ reprezintă o soluţie a ecuaţiei cu variabile separate.

Conform cu 4.3.1. găsim $y - y_p = ke^{-\int_{x_0}^{x} s(t)\mathrm{d}t}$ sau $y = y_p + ke^{-\int_{x_0}^{x} s(t)\mathrm{d}t}$.

Deci

Orice soluţie a ecuaţiei (1) este egală cu suma dintre o soluţie particulară y_p a acestei ecuaţii şi soluţia generală a ecuaţiei $y' + s(x)y = 0$.

Problema care se pune este de a determina pe y_p. Acest lucru îl realizăm pentru $s(x)$=constant şi pentru o anumită formă a lui $t(x)$ aşa cum se arată în tabelul de mai jos.

Forma lui $t(x)$	Forma soluţiei particulare y_p
Polinom de grad n	Polinom de grad n
Ae^{rx}	αe^{rx}
Ae^{-rx}	$\alpha x e^{-rx}$
$A\sin(rx) + B\cos(rx)$	$\alpha\sin(rx) + \beta\cos(rx)$

Metoda de determinare a coeficienţilor care figurează în structura lui y_p este **cea a coeficienţilor nedeterminaţi**.

Exemplu practic. Să se rezolve ecuaţia liniară diferenţială

$y' + 2y = 3x^2 + 1$.

R. Soluţia generală a ecuaţiei $y' + 2y = 0$ este $y(x) = ke^{-2x}$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei date de forma (vezi tabelul) $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Deci ea verifică ecuaţia dată

$(2\alpha x + \beta) + 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 3x^2 + 1$ sau

$2\alpha x^2 + (2\alpha + 2\beta)x + \beta + 2\gamma = 3x^2 + 1$.

De aici, prin identificare, avem sistemul: $\begin{cases} 2\alpha = 3 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + 2\gamma = 1, \end{cases}$

cu soluţia $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{3}{2}$, $\gamma = \frac{5}{4}$.

Aşadar soluţia particulară a ecuaţiei date este

$y_p(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$, iar soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$y(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} + ke^{-2x}$.

Metoda a doua (Metoda variaţiei parametrului). Are un caracter mai general de aplicabilitate, dar este mai dificilă.

Am văzut că soluţia generală a ecuaţiei $y' + s(x)y = 0$

are forma $y(x) = ke^{-\int_{x_0}^{x} s(u)du}$. Notăm pentru uşurinţa scrierii $e(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} s(u)du}$ şi deci $y(x) = ke(x)$.

Vom determina soluţiile ecuaţiei (1) considerând parametrul k funcţie de x, notat $k(x)$.

Aşadar punem $y(x) = k(x)e(x)$ când

$y'(x) = k'(x)e(x) + k(x)e'(x)$.

Condiţia ca y să fie soluţie pentru (1) se traduce printr-o condiţie pentru k.

Ecuaţia (1) devine: $k'(x)e(x) + k(x)e'(x) + s(x)k(x)e(x) = t(x)$

Cum $e'(x) + s(x)e(x) = 0$ rezultă

$k'(x)e(x) = t(x)$,

care este o ecuaţie diferenţială ale cărei soluţii se obţin din

$k'(x) = \dfrac{t(x)}{e(x)}$ prin integrare, când $k(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t(v)}{e(v)}dv + C$.

Acum soluţiile ecuaţiei (1) se scriu

$$y(x) = \left[\int \frac{t(v)}{e(v)}dv + C\right] e^{-\int_{x_0}^{x} s(u)du}.$$

Exemplu practic. Să se rezolve ecuaţia diferenţială $y' + xy = 3x$.

R. O soluţie a ecuaţiei $y' + xy = 0$ (din $\dfrac{y'}{y} = -x$) este $e(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Considerăm acum $y(x) = k(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ şi impunem condiţia ca această funcţie să verifice ecuaţia dată

$k'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + k(x)(-e^{-\frac{x^2}{2}}x) + xk(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 3x$ sau

$k'(x) = 3xe^{\frac{x^2}{2}}$, iar de aici (integrând)

$k(x) = 3e^{\frac{x^2}{2}} + C$.

Acum soluţiile ecuaţiei date sunt

$y(x) = (3e^{\frac{x^2}{2}} + C)e^{-\frac{x^2}{2}} = 3 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Observaţie. Să aplicăm această metodă rezolvării ecuaţiei diferenţiale $y' + 2y = 3x^2 + 1$, discutată la prima metodă.

Ecuaţia $y' + 2y = 0$ are o soluţie $y = e^{-2x}$.

Pentru ecuaţia dată căutăm soluţii de forma

$y(x) = k(x)e^{-2x}$, când (cerem să verifice ecuaţia dată) rezultă

$k'(x)e^{-2x} + k(x)(-2e^{-2x}) + 2k(x)e^{-2x} = x^2 + 1$ sau

$k'(x) = x^2e^{2x} + e^{2x}$.

De aici, prin integrare, se obţine $k(x) = \dfrac{3}{2}x^2e^{2x} - \dfrac{3}{2}xe^{2x} + \dfrac{5}{4}e^{2x} + C$.

Soluţiile căutate au forma

$$y(x)=\left(\frac{3}{2}x^2e^{2x}-\frac{3}{2}xe^{2x}+\frac{5}{4}e^{2x}+C\right)e^{-2x}=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}+Ce^{-2x}.$$

Probleme propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale

1) $y'+3x=0$; 2) $y'=\dfrac{1}{4+x^2}$; 3) $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

4) $y'=\dfrac{x-1}{x+1}$; 5) $y'=\sqrt[3]{x}$.

2. Să se rezolve ecuaţiile cu variabile separabile:

1) $y'\sin x=y\cos x$; 2) $xy'-3y=0$; 3) $x^2y'+y=3$;

4) $y'=\dfrac{1+y^2}{x}$; 5) $(x^2-4)y'=2y$; 6) $\sqrt{y^2+1}\mathrm{d}x=xy\mathrm{d}y$.

3. Să se determine soluţiile următoarelor ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile care satisfac condiţii iniţiale date:

1) $2xy'+y=1,\ y(1)=2$; 2) $y'=-\dfrac{2x}{x^2-1}y^2,\ y(2)=1$;

3) $y'=3\sqrt[3]{y^2},\ y(2)=1$; 4) $y'=\dfrac{y^2}{x},\ y(1)=\dfrac{1}{2}$;

5) $(1+e^x)yy'=e^x,\ y(0)=1$.

4. Să se rezolve ecuaţiile lineare:

1) $y'+2y=e^{-x}$; 2) $y'-xy+x^3$; 3) $xy'-3y=x^4e^x$;

4) $y'+2xy=e^{-x^2}$; 5) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

5. Să se determine soluţiile ecuaţiilor diferenţiale liniare care satisfac condiţii iniţiale date:

1) $y'=-y+1,\ y(0)=1$; 2) $y'-y=3,\ y(0)=2$;

3) $y'-y=3x+2,\ y(0)=-3$; 4) $y'+y=e^{-x},\ y(0)=0$;

5) $xy'+3y=-\dfrac{2}{x},\ y(-1)=-3$.

6. Exprimaţi cu ajutorul unei ecuaţii diferenţiale enunţurile următoare:

a) Numărul dezintegrărilor care se produc în fiecare secundă într-un eşantion de radium este proporţional cu numărul de atomi existent în momentul considerat.

b) Populaţia unui oraş creşte cu o viteză proporţională cu valoarea sa actuală.

c) Tangenta în fiecare punct $(x,f(x))$ al graficului unei funcţii f taie axa Ox în punctul $\left(\dfrac{x}{2},0\right)$.

7. Aplicaţii ale ecuaţiilor diferenţiale în matematică, fizică, chimie, biologie.

1) Să se determine ecuaţia unei curbe care trece prin punctul $(0, -2)$ şi pentru care panta tangentei în fiecare punct să fie egală cu ordonata acestui punct mărită cu trei unităţi.

2) Să se determine curba care trece prin punctul $(0, -2)$ pentru care coeficientul unghiular al tangentei în fiecare punct să fie egal cu de trei ori ordonata acelui punct.

3) Într-un mediu, cu temperatura menţinută constantă la $60°$ se scufundă un corp încălzit la 180^0 C. Într-un minut temperatura corpului coboară la 120^0 C. După cât timp temperatura corpului ajunge la 90^0C?

4) Numărul de bacterii dintr-o cultură este de 100.000. În două ore şi jumătate numărul lor a crescut cu 10%. În câte ore numărul lor ajunge la 200.000 ? Câte bacterii vor fi în 10 ore ? (Presupunem că viteza de creştere este proporţională, în fiecare moment t, cu cantitatea existentă la momentul t).

5) Să se determine drumul s parcurs de un corp în timpul t ştiind că viteza sa este proporţională cu drumul parcurs şi că în 10 s corpul a parcurs 100 m, iar în 15 s a parcurs 200 m.

6) Viteza de creştere a populaţiei unei ţări la momentul t este proporţională cu numărul de locuitori la momentul t. Ştiind că la momentele 0 şi respectiv t_1 populaţia este egală cu y_0 şi respectiv y_1 să se calculeze populaţia acestei ţări la momentul t.

7) Un corp conţine n molecule. La momentul t_0 începe o reacţie. Numărul de molecule transformate la momentul t este egal cu x. Să se determine funcţia $x(t)$ ştiind că viteza de transformare la momentul t este proporţională cu numărul de molecule rămase la acel moment.

5.3.3. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi

Definiţie. Se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul doi o ecuaţie de forma $F(x, y, y', y'') = 0.$

În cele ce urmează noi ne vom ocupa de un tip particular al acestor ecuaţii diferenţiale şi anume **ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul doi cu coeficienţi constanţi.** Aceste ecuaţii au forma

$$ay'' + by' + cy = h(x),$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, iar h este o funcţie continuă de o formă cunoscută.

Raţiunile care ne-au determinat să ne oprim asupra acestei familii re-

strânse de ecuaţii diferenţiale sunt multiple. Primul ar fi acela că aceste ecuaţii diferenţiale sunt printre rarele cazuri în care se pot determina explicit toate soluţiile. În plus, această rezolvare în practică se reduce la rezolvarea unor ecuaţii algebrice. În fine acest tip de ecuaţii diferenţiale are multiple aplicaţii în diferite domenii ale ştiinţei.

Să mai notăm că **toate soluţiile acestor ecuaţii diferenţiale sunt functii explicite de variabila x. Aceste funcţii aparţin unei familii ce depind de doi parametrii.** În unele cazuri se determină aceşti parametrii în urma impunerii a două condiţii iniţiale ($y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$) (problema Cauchy) obţinând o soluţie particulară.

Vom aborda aceste ecuaţii diferenţiale în două cazuri:

1) când membrul drept este funcţia zero ($h(x) = 0$), ecuaţia numindu-se **omogenă** sau **fără membrul drept**.

2) când există membrul drept nenul, ecuaţia numindu-se **neomogenă** sau **cu membru drept**.

Ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordinul doi

Forma acestei ecuaţii este

$$ay'' + by' + cy = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \qquad (1).$$

Pentru rezolvarea acestei ecuaţii se caută soluţii de forma $y(x) = e^{rx}$, unde r este un număr ce urmează a se determina.

Avem $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2e^{rx}$ şi (1) devine

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \text{ sau } ar^2 + br + c = 0.$$

> Ecuaţia $ar^2 + br + c = 0$ se numeşte **ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei diferenţiale** (1).

Nu vom detalia partea teoretică privind obţinerea soluţiei generale a ecuaţiei (1), ci vom prezenta rezultatul final al demersului teoretic.

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei diferenţiale (1) este întotdeauna familia combinaţiilor liniare **a două soluţii fundamentale**.

Cu alte cuvinte **soluţia generală** a ecuaţiei (1) este

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

unde y_1, y_2 sunt soluţiile fundamentale, iar $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Problema este de a determina soluţiile fundamentale y_1, y_2.

Teorema de mai jos precizează acest fapt.

Teoremă. Dacă ecuaţia caracteristică
$ar^2 + br + c = 0$, a ecuaţiei diferenţiale (1), are:
1) două rădăcini reale r_1, r_2 distincte, atunci două soluţii fundamentale sunt $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$, iar soluţia generală a lui (1) este
$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
2) o rădăcină reală dublă r, atunci două soluţii fundamentale sunt $y_1(x) = e^{rx}$, $y_2(x) = xe^{rx}$, iar soluţia generală a lui (1) este
$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{rx}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
3) două rădăcini complexe $\alpha + i\beta$ şi $\alpha - i\beta$, atunci două soluţii fundamentale sunt $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, iar soluţia generală a lui (1) este
$y(x) = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Vom ilustra această teoremă în cele trei cazuri

Exemple practice. 1) a) Să se rezolve ecuaţia diferenţială omogenă de ordinul doi: $y'' + 2y' - 3y = 0$.
b) Să se rezolve problema Cauchy dacă $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
R. a) Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei diferenţiale este $r^2 + 2r - 3 = 0$, cu soluţiile $r_1 = 1$, $r_2 = -3$.
Soluţiile fundamentale ale ecuaţiei date sunt $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-3x}$, iar soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este
$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

b) A rezolva problema Cauchy înseamnă a determina din soluţia generală acea soluţie $y(x)$ pentru care $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, ceea ce revine la a preciza parametrii C_1, C_2.
Din condiţiile iniţiale $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2 e^{-3\cdot 0} \\ -2 = C_1 e^0 - 3C_2 e^{-3\cdot 0} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -2 = C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

cu soluţia $C_1 = \dfrac{1}{4}$, $C_2 = \dfrac{3}{4}$.
Deci soluţia ecuaţiei diferenţiale este $y(x) = \dfrac{1}{4}e^x + \dfrac{3}{4}e^{-3x}$.

2) a) Să se rezolve ecuaţia diferenţială $y'' + 2y' + y = 0$.
b) Să se rezolve problema Cauchy dacă $y(1) = 0$, $y'(1) = \dfrac{1}{e}$.
R. a) Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei diferenţiale este $r^2 + 2r + 1 = 0$, cu soluţia reală dublă $r = -1$.

Soluţiile fundamentale ale ecuaţiei diferenţiale sunt

$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = xe^{-x},$

iar soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

b) Soluţia particulară se obţine din soluţia generală în urma determinării constantelor C_1, C_2 din condiţiile iniţiale $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{1}{e}$. Avem sistemul:

$$\begin{cases} (C_1 + C_2)e^{-1} = 0 \\ (C_2 - C_1 - C_2)e^{-1} = e^{-1} \end{cases}, \text{ cu soluţia } C_1 = -1, \ C_2 = 1.$$

Deci soluţia problemei lui Cauchy este $y(x) = (x-1)e^{-x}$.

3) a) Să se rezolve ecuaţia diferenţială $y'' + 2y' + 5y = 0$.

b) Să se rezolve problema Cauchy dacă $y(0) = y'(0) = 1$.

R. a) Se determină ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei diferenţiale. Avem: $r^2 + 2r + 5 = 0$ cu soluţiile $r_1 = -1 - 2i$, $r_2 = -1 + 2i$.

Acum soluţiile fundamentale ale ecuaţiei diferenţiale au forma: $y_1(x) = e^{-x}\cos(2x)$, $y_2(x) = e^{-x}\sin(2x)$, iar soluţia generală a ecuaţiei este

$y(x) = e^{-x}[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x], \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

b) Din $y(0) = 1$ şi $y'(0) = 1$, deducem $C_1 = C_2 = 1$ şi deci soluţia la problema Cauchy este $y(x) = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$.

Probleme propuse

Pentru ecuaţiile diferenţiale de mai jos determinaţi soluţia care verifică condiţiile iniţiale date:

1) $y'' - 4y' - 5y = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 2;$
2) $y'' - 2y' - 3y = 0, \ y(0) = 4, \ y'(0) = 0;$
3) $y'' - y' = 0, \ y(1) = e + 1, \ y'(1) = e;$
4) $y'' - 6y' + 9y = 0, \ y(1) = 1, \ y'(1) = -1;$
5) $4y'' + 4y' + y = 0, \ y(0) = -1, \ y'(0) = 1;$
6) $y'' - 2y' + y = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1;$
7) $y'' + 4y = 0, \ y(\frac{\pi}{2}) = 1, \ y'(\frac{\pi}{2}) = 1;$
8) $y'' - 2y' + 2y = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1;$
9) $y'' - 2y' + 3y = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 3$

Ecuaţia diferenţială liniară neomogenă de ordinul doi

Forma ecuaţiei diferenţiale neomogene de ordinul doi cu coeficienţi constanţi este

$ay'' + by' + cy = h(x), \qquad (1)$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, iar h este o funcţie continuă pe un interval.
Metoda de rezolvare pe care o propunem mai jos se bazează pe următoarele fapte:
1) Dacă funcţia h are o formă convenabilă, atunci se poate determina **o soluţie** particulară a ecuaţiei (1).
2) Dacă se cunoaşte o soluţie particulară a ecuaţiei (1), atunci se pot determina **toate soluţiile** ecuaţiei (1), utilizând cunoştinţele de la paragraful precedent 4.3.2.
Într-adevăr dacă y_p este o soluţie particulară a lui (1), atunci verifică egalitatea

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = h.$$

Dacă y este o soluţie oarecare a lui (1), atunci

$$ay'' + by' + cy = h.$$

Scăzând ultimele două relaţii, membru cu membru, rezultă
$a(y'' - y_p'') + b(y' - y_p') + c(y - y_p) = 0$, ceea ce arată că $y - y_p$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene

$$ay'' + by' + c = 0,$$

pe care am rezolvat-o mai sus. Dacă y_1 şi y_2 sunt cele două soluţii fundamentale ale ecuaţiei diferenţiale omogene, atunci

$y(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ sau

$y(x) = [c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] + y_p(x)$. Deci am obţinut următorul rezultat important:

Teorema. Soluţia generală a ecuaţiei liniare

$$ay'' + by' + cy = h(x), \qquad (*)$$

este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene

$$ay'' + by' + cy = 0$$

şi o soluţie particulară a ecuaţiei $(*)$.

Problema care rămâne de rezolvat este aceea a determinării unei soluţii particulare pentru ecuaţia neomogenă.
Tabelul următor vă ajută în alegerea soluţiei particulare y_p, atunci când se cunoaşte forma lui h.

Forma lui h	Forma soluţiei particulare y_p
$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$	$\alpha_0 + \alpha_1x + \ldots + \alpha_nx^n$
ae^{bx}	$\alpha e^{\beta x}$
$a\sin bx,\ a\cos bx$	$\alpha\sin bx + \beta\cos bx$
$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)e^{bx}$	$(\alpha_0 + \alpha_1x + \ldots + \alpha_nx^n)e^{bx}$
$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)\sin bx$	$(\alpha_0 + \alpha_1x + \ldots + \alpha_nx^n)\sin bx +$ $+(\beta_0 + \beta_1x + \ldots + \beta_nx^n)\cos bx$
$ae^{bx}\sin cx,\ ae^{bx}\cos cx$	$\alpha e^{bx}\sin cx + \beta e^{bx}\cos cx$

Următoarele probleme rezolvate vă vor facilita înţelegerea rezolvării unei categorii largi de astfel de ecuaţii.

Exemple practice. 1) Să se rezolve ecuaţia diferenţială neomogenă

$y'' + 2y' - 3y = \cos x.$

R. În acest caz $h(x) = \cos x$. Din tabelul de mai sus căutăm pentru ecuaţia dată o soluţie particulară de forma

$y_p(x) = \alpha\sin x + \beta\cos x,$

unde α şi β sunt coeficienţi pe care-i vom determina din cerinţa ca y_p să verifice ecuaţia. Avem $y_p'(x) = \alpha\cos x - \beta\sin x$, $y_p''(x) = -\alpha\sin x - \beta\cos x$ şi deci

$(-\alpha\sin x - \beta\cos x) + 2(\alpha\cos x - \beta\sin x) - 3(\alpha\sin x + \beta\cos x) = \cos x$

sau

$(-4\alpha - 2\beta)\sin x + (-4\beta + 2\alpha)\cos x = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

De aici prin identificare rezultă sistemul

$$\begin{cases} -4\alpha - 2\beta = 0 \\ -4\beta + 2\alpha = 1 \end{cases}, \text{ cu soluţia } \alpha = \frac{1}{10},\ \beta = -\frac{1}{5}.$$

Aşadar $y_p(x) = \frac{1}{10}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$ reprezintă soluţia particulară a ecuaţiei date. Soluţia generală a ecuaţiei omogene $y'' + 2y' - 3y = 0$ este

$y_g(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

În final soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x} + \frac{1}{10}\sin x - \frac{1}{5}\cos x.$$

2) Să se rezolve ecuaţia diferenţială neomogenă $y'' + y = x^2$.

R. Acum $h(x) = x^2$. Căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia dată de forma $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Coeficienţii α, β, γ se determină (prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi) din cerinţa ca y_p să verifice ecuaţia.

Avem $y_p'(x) = 2\alpha x + \beta$, $y_p''(x) = 2\alpha$ şi deci

$2\alpha + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^2$ sau

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma + 2\alpha = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De aici $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -2$. Aşadar $y_p(x) = x^2 - 2$.

Ecuaţia omogenă $y'' + y = 0$ are soluţia generală

$y_g(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Acum soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$.

3) Să se rezolve ecuaţia diferenţială neomogenă $y'' + y' = 4x^2 e^x$.

R. Căutăm soluţia particulară a acestei ecuaţii de forma

$y_p(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x$.

Coeficienţii α, β, γ se determină din condiţia că y_p verifică ecuaţia dată.

Avem: $y_p'(x) = [\alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + \beta + \gamma]e^x$,

$y_p''(x) = [\alpha x^2 + (4\alpha + \beta)x + 2\alpha + \beta + \gamma]e^x$ şi deci

$2\alpha x^2 + (6\alpha + 2\beta)x + 2\alpha + 3\beta + 2\gamma = 4x^2$.

De aici sistemul: $\begin{cases} 2\alpha = 4 \\ 6\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$

cu soluţia $\alpha = 2$, $\beta = -6$, $\gamma = 7$.

Aşadar soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este

$y_p(x) = (2x^2 - 6x + 7)e^x$.

Soluţia generală a ecuaţiei omogene $y'' + y' = 0$ este $y_g(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Acum soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este

$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x$.

4) Să se rezolve ecuaţia diferenţială neomogenă

$y'' + 2y' - 3y = \cos x + 2e^{-3x}$.

R. În acest caz $h(x) = \cos x + 2e^{-3x}$ este suma a două tipuri de funcţii care apar în tabel $h_1(x) = \cos x$, $h_2(x) = 2e^{-3x}$.

Pentru a găsi o soluţie particulară y_p a ecuaţiei

$ay'' + by' + cy = h_1 + h_2$

este suficient să luăm o sumă

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$,

unde y_{p_1} este o soluţie particulară a ecuaţiei

$ay'' + by' + cy = h_1$

şi y_{p_2} desemnează o soluţie particulară a ecuaţiei

$ay'' + by' + cy = h_2$.

Acest procedeu de obţinere a soluţiei particulare se numeşte **principiul juxtapunerii.**

În cazul nostru găsim $y_{p_1}(x) = \frac{1}{10}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$ (vezi exemplul 1)),

$y_{p_2}(x) = -\frac{x}{2}e^{-3x}$. Acum soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene este

$$y_p(x) = \frac{1}{10}\sin x - \frac{1}{5}\cos x - \frac{x}{2}e^{-3x}.$$

Ecuaţia omogenă $y'' + 2y' - 3y = 0$ are soluţia generală

$y_g(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Deci soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$y(x) = y_p(x) + y_g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Probleme propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale:

1) $y'' + 4y' + 3y = 3$; 2) $y'' - 4y = 4x$; 3) $y'' + y = 2e^{-x}$;
4) $y'' - y = x^2 + 2x + 3$; 5) $y'' - y = 4e^x$; 6) $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$;
7) $y'' + 3y' + 2y = x\sin x$; 8) $y'' + 3y' = e^x$; 9) $y'' + y = \sin x - \cos x$;
10) $y'' - 6y' + 9y = 4e^x - 16e^{3x}$; 11) $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$;
12) $y'' + y = 2(1 - x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;
13) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
14) $y'' + y' = e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;
15) $y'' + y = 4x\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. Aplicaţii ale ecuaţiilor diferenţiale de ordinul doi în matematică, fizică.

1) Să se determine curba de ecuaţie $y = f(x)$ a cărei derivată a doua în fiecare punct $M(x, y)$ este egală cu suma coordonatelor sale şi pentru care $f(0) = f'(0) = 0$.

2) La momentul $t = 0$, un corp de masă m este lăsat să cadă liber din punctul O, fără viteză iniţială, şi cade sub acţiunea greutăţii sale. Să se determine ecuaţia mişcării acestui corp ştiind că rezistenţa aerului este proporţională cu viteza de cădere.

3) Rezistenţa opusă de aer unei maşini de masă m este proporţională cu viteza v a maşinii. Dacă F este forţa constantă dezvoltată de motorul maşinii, atunci stabiliţi legea mişcării maşinii $y(t)$. Calculaţi $v(t) = y'(t)$ dacă se cunosc condiţiile: a) $v(0) = 0$; b) $v(0) = v_0$ şi $F = 0$ (pentru $t \geq 0$).

4) (Ecuaţia pendulului) Un punct material de masă m este suspendat de un fir inextensibil de lungime $l = 2\ m$ în aşa fel încât se poate mişca pe un arc de cerc. Acest sistem se numeşte **pendul matematic.** După ce am scos pendulul din poziţia de echilibru se notează unghiul dintre cele două poziţii cu θ. Atunci ecuaţia pendulului este $2\theta'' = -9,8 \cdot \theta$, unde

$\theta(t)$ este funcţie de timpul t. Determinaţi legea mişcării pendulului.

5) (Oscilatorul electric) Se consideră un circuit electric format dintr-un condensator cu capacitatea de $\frac{2}{1010}$ farazi, o inductanţă de $\frac{1}{20}$ henri şi o rezistenţă de 1ohm, toate legate în serie. Dacă în momentul $t = 0$ avem $I = 0$ şi sarcina electrică din condensator este egală cu 1 coulomb, să se găsească sarcina electrică şi intensitatea curentului în circuit după 0,01 secunde.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

pag. 300. 1. 1) $y = -\frac{3x^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$; 2) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$; 3) $y = \sqrt{1+x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$; 4) $y = x - \ln(x+1)^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$; 5) $y = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$. **2.** 1) $y = C\sin x$, $C \in \mathbb{R}$; 2) $y = Cx^3$, $C \in \mathbb{R}$; 3) $y = 3 + Ce^{\frac{1}{x}}$, $C \in \mathbb{R}$; 4) $y = \operatorname{tg}\ln Cx$, $C \in \mathbb{R}$; 5) $y = C\sqrt{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}$, $C \in \mathbb{R}$; 6) $\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}$, $x = 0$. **3.** 1) $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{1}{\ln(x^2-1) + 1 - \ln 3}$; 3) $y = (x-1)^3$; 4) $y = \frac{1}{2 - \ln x}$; 5) $y = \sqrt{1 + \ln(\frac{1+e^x}{2})^2}$. **4.** 1) $y = e^{-x} + Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$; 2) $y = -x^2 - 2 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$; 3) $y = x^3(e^x + C)$, $C \in \mathbb{R}$; 4) $y = (C+x)e^{-x^2}$; 5) $y = (C+x^2)e^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. **5.** 1) $y = 1$; 2) $y = -3 + 5e^x$; 3) $y = 2e^x - 3x - 5$; 4) $y = xe^{-x}$; 5) $y = \frac{4-x^2}{x^3}$ **6.** a) $y' = -ky$; b) $y' = ky$; c) $xf'(x) = 2f(x)$. **7.** 1) $y = e^x - 3$; 2) $y = -2e^{3x}$; 3) Fie $T(t)$ temperatura corpului la momentul t. Avem ecuaţia diferenţială $T'(t) = k(T_0 - T(t))$, T_0 fiind temperatura constantă a mediului. Deci $T'(t) = -kT(t) + 60k$. Găsim $T(t) = 60 + ce^{-kt}$. Avem $T(0) = 180$, $T(1) = 120$ când $c = 120$, $k = \ln 2$. În final $t = 2$ minute.

4) $t = 18,18$ h; $y(10) = 146410$ bacterii. 5) $\frac{ds}{dt} = ks$, $s = 25 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$; 6) $y'(t) = ky(t) = y_0 \cdot (\frac{y_1}{y_0})^{\frac{t}{t_1}}$; 7) $x'(t) = k(n - x(t))$, $x(t) = n + \alpha e^{-kt}$.

pag. 304. 1) $y(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{5x})$; 2) $y(x) = 3e^{-x} + e^{3x}$; 3) $y(x) = 1 + e^x$; 4) $y(x) = (5 - 4x)e^{3x-3}$; 5) $y(x) = (-1 + \frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}}$; 6) $y(x) = xe^x$; 7) $y(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x$; 8) $y(x) = e^x \sin x$; 9) $y(x) = e^x(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)$.

pag. 308. 1. 1) $y(x) = 1 + C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; 2) $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; 3) $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; 4) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - (x^2+2x+5)$; 5) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + 2xe^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

6) $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{-5x} + 2x^2e^{-5x}$;

7) $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + (\frac{1}{10}x + \frac{3}{25})\sin x$;

8) $y(x) = C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{1}{4}e^x$; 9) $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}(\cos x + \sin x)$;

10) $y(x) = (C_1+C_2x)e^{3x}+e^x-8x^2e^{3x}$; 11) $y(x) = C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-2x+1+e^x$;

12) $y(x) = 2 - 2x$; 13) $y(x) = x^2 + e^{3x}$; 14) $y(x) = 1 - xe^{-x}$;

15) $y(x) = x\cos x + x^2\sin x$.

2. 1) $y'' = x + y$; $y(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$.

2) Se ia axa Oy orientată pozitiv în jos. Ecuaţia mişcării este

$y'' = g - \frac{k}{m}y'$; $y(t) = \frac{m^2g}{k^2}\left(\frac{k}{m}t + e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right)$.

3) $my'' = F - ky'$; a) $v(t) = \frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$; b) $v(t) = v_0e^{-\frac{kt}{m}}$.

4) $\theta(t) - C_1\sin(\sqrt{4,9}\,t) + C_2\cos(\sqrt{4,9}\,t) = C\sin(\sqrt{4,9}\,t + D)$. Mişcarea pendulului este periodică de perioadă $T = \frac{2\pi}{\sqrt{4,9}}$ secunde. 5) Dacă $q(t)$ este sarcina electrică a condensatorului la momentul t, L inductanţa, R o rezistenţă şi C capacitatea condensatorului, atunci are loc ecuaţia

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0.$$

Se găseşte $q(t) = e^{-10t}(A\cos 100t + B\sin 100t)$. Din $q(0) = 1$, $q'(0) = I(0) = 0$ se deduc $A = 1$, $B = 0,1$ şi deci $q(0,01) \approx 0,57$ coulombi, $I(0,01) = q'(0,01) = -76,9$ amperi.

VI. PROBLEME RECAPITULATIVE

„Îţi pare aşadar şi ţie că rostul vorbirii
nu este decât fie de a învăţa pe alţii,
fie de a reaminti ceva“
(Augustin, „De magistro“)

1. Să se determine numerele reale a, b astfel încât funcţia $G : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$ să fie o primitivă a funcţiei $g : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$, unde $G(x) = (ax + b)\sqrt{2x - 1}$, $g(x) = \sqrt{2x - 1}$.

2. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int \frac{dx}{1 - x^3} = a \ln \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 1} + b \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C, \ x > 1.$$

3. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia G să fie o primitivă a lui g, dacă

$$g, G : \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}, \ g(x) = 5x\sqrt{2x + 1}, \ G(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x + 1}.$$

4. Dată fiind o funcţie f să se determine F o primitivă a lui f, al cărui grafic să conţină punctul $A(0, 1)$, unde $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{15x}{2}\sqrt{x + 1}.$$

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln x - x, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$.

1) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

2) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \sin 2x$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = e^{-x}(a \cos 2x + b \sin 2x)$ să fie o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$ şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^{n\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

7. Să se determine funcţia polinomială f, cu coeficienţi reali, de gradul şapte cu proprietăţile: $(x - 1)^4$ divide $f(x) + 1$, iar $(x + 1)^4$ divide pe $f(x) - 1$.

8. Să se arate că următoarele funcţii nu admit primitive pe domeniile de definiţie:

a) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin x}{x}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$;

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x>0\\ -1, & x\le 0\end{cases}$.

9. Să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru următoarele integrale

1) $I_n=\displaystyle\int\frac{x^{2n}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}^*$; 2) $I_n=\displaystyle\int e^x\cos^n x\mathrm{d}x,\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*$;

3) $I_n=\displaystyle\int(\arccos x)^n\mathrm{d}x,\ x\in(-1,1),\ n\in\mathbb{N}^*$.

10. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$. Să se determine numerele reale a,b,c pentru care funcţia $G:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $G(x)=\dfrac{c+bx+a\ln(x+1)}{x}$ este o primitivă a funcţiei $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ şi în plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} G(x)=1$.

11. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ \dfrac{1}{x}, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}.\end{cases}$

Să se arate că f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$, dar $f\circ f$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

12. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3-x, & x\in\mathbb{Q}\\ \dfrac{2}{x}, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}.\end{cases}$

1) Să se arate că f este inversabilă şi să se calculeze f^{-1}.
2) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f şi f^{-1}.
3) Să se studieze dacă f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

13. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\max(x,x^2,x^3), & x\le 0\\ \min(x,x^2,x^3), & x>0.\end{cases}$

1) Să se determine ordinul maxim de derivabilitate al funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

2) Să se studieze dacă f admite primitive pe $\mathbb{R}$, şi să se calculeze o astfel de primitivă dacă există.

3) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

14. 1) Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ ax^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$$

are inversă continuă. Să se calculeze f^{-1}.

2) Pentru $a = 3$ să se determine o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

3) Pemtru $a = -1$ să se calculeze $(f^{-1})'(3)$, $(f^{-1})''(3)$.

15. 1) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c, & x \in (0,1) \\ 3 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2) Pentru valorile lui a, b, c de la 1) să se determine o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$ şi apoi să se calculeze $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

16. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \mathrm{x} - 1)$.

1) Să se determine punctul unghiular al graficului funcţiei date.

2) Să se stabilească dacă f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi în caz afirmativ să se calculeze o astfel de primitivă.

3) Să se calculeze $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

17. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1, \ a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1) Să se determine a, b astfel ca în $x = 1$, graficul funcţiei să admită tangentă dreapta $y = ax + b$.

2) Pentru a, b determinaţi la 1) să se găsească o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

3) Să se calculeze $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, unde a, b sunt cei determinaţi la 1).

18. O singură afirmaţie, din următoarele, este adevărată:

A) f admite primitive pe $[a, b] \Rightarrow f$ este continuă pe $[a, b]$ $(f : [a, b] \to \mathbb{R})$;

B) f continuă pe $[a, b] \Rightarrow f$ admite primitive pe $[a, b]$.

19. Fie $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^4}{(bx + c)^3}$, $a, b, c > 0$, E fiind domeniul maxim de definiţie pentru f.

1) Să se determine a, b, c pentru care $y = x - 3$ este asimptotă oblică la $+\infty$ pentru graficul lui f.

2) Pentru a, b, c de la 1) să se arate că $\frac{1}{8} \leq \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{8}{27}$.

20. Fie $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2 + ax + b}{x+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Să se determine a, b astfel încât $y = 2x + 3$ să fie asimptotă oblică la $+\infty$ pentru graficul lui f.

2) Să se determine valoarea lui b pentru care

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x^2 + 3x,\ x > 0, \text{ cu } a \text{ determinat la 1).}$$

21. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 3x + 1)\ln x, & x \geq 1 \\ \sqrt{x - x^2}, & x \in [0, 1) \\ \dfrac{x^3 - x}{2x - 1}, & x < 0. \end{cases}$$

Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze $\int f(x)\mathrm{d}x$.

22. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 3x + 1)e^x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 - x + 1}, & x \in [0, 1] \\ \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{2x - 1}, & x > 1 \end{cases}$

1) Să se reprezinte grafic f.

2) Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze $\int f(x)\mathrm{d}x$.

23. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}, & x \leq 0 \\ x\ln x, & x \in (0, 1) \\ \dfrac{1}{e^x} - \dfrac{1}{e}, & x \geq 1. \end{cases}$

1) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f pe $\mathbb{R}$.

2) Să se arate că f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze $\int f(x)\mathrm{d}x$.

24. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x}, & x < 1 \\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$

1) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f pe $\mathbb{R}$.

2) Să se traseze graficul funcţiei f.

3) Să se arate că f admite o primitivă pe $\mathbb{R}$ şi să se calculeze

$\int f(x)\mathrm{d}x$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

25. Se dă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\ln^2 \mathrm{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$

1) Să se arate că f este continuă în $x=0$, dar nu este derivabilă în $x=0$.
2) Să se determine intervalele de monotonie pentru f.
3) Să se traseze graficul funcţiei şi să se discute ecuaţia $f(x)=\lambda$, unde λ este parametru real.
4) Să se determine o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

26. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$, $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1) Să se determine intervalele de monotonie pentru f şi să se arate că f este bijectivă, construind f^{-1}.
2) Să se calculeze $(f^{-1})^{(n)}$ (derivata de ordinul n).
3) Să se traseze graficul lui f^{-1} şi să se discute ecuaţia $f^{-1}(x)=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
4) Să se determine o primitivă a lui f^{-1} pe $(-1,1)$.

27. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & x\in\mathbb{Q} \\ 3, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}. \end{cases}$$

1) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f.
2) Să se studieze dacă f are primitive.

28. Se consideră $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln \mathrm{x}\text{-}1}{x^2}$.

1) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiei.
2) Să se traseze graficul lui f şi apoi să se discute ecuaţia $\ln \mathrm{x}\text{-}1=\lambda x^2$, unde λ este un parametru real.
3) Să se determine primitivele lui f pe $\mathbb{R}^*$.

29. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{|1-x|}}{x}$.

1) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f.
2) Să se traseze graficul lui f şi să se discute ecuaţia $\sqrt{|1-x|}=\lambda x$, unde λ este parametru real.
3) Să se determine o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}^*$.

30. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{|e^x-1|}{e^x+1}$.

1) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f.

2) Să se traseze graficul lui f şi să se discute ecuaţia $f(x) = \lambda$, λ parametru real.
3) Să se determine primitivele lui f pe $\mathbb{R}$.

31. Fie funcţia $f : I \to [0, \infty)$, $f(x) = \ln \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

1) Să se determine domeniul de definiţie.
2) Să se arate că f este bijectivă pe I şi să se calculeze inversa lui f.
3) Să se traseze graficul lui f şi să se discute ecuaţia $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4) Să se determine primitivele lui f pe $(0, 1)$.

32. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|e^{-|x|}$.

1) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea lui f.
2) Să se traseze graficul lui f şi să se discute ecuaţia $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) Să se determine primitivele lui f pe $\mathbb{R}$.

33. Fie funcţia $f(x) = \dfrac{ax^3+bx+c}{x^2+\mathrm{d}x+e}$, $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

1) Să se determine a, b, c, d, e astfel încât asimptota oblică la grafic să aibă panta $m = 2$, dreptele $x = -2$, $x = 2$ să fie asimptote verticale, iar în punctul de abscisă $2\sqrt{3}$ funcţia să aibă un minim egal cu $6\sqrt{3}$.
2) Cu a, b, c, d, e determinate la 1) să se traseze graficul lui f.
3) Să se calculeze $\displaystyle\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$.

34. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+|x|)^{\frac{1}{|x|}}$.

1) Să se arate că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq e$.
2) Să se traseze graficul funcţiei.
3) Să se arate că aria porţiunii delimitate de graficul funcţiei, axa Ox, dreptele $x = 1$, $x = 2$ este cuprinsă între $\sqrt{2}$ şi 3.

35. Fie funcţia $f(x) = \dfrac{|x^3-1|}{ax^2+bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Să se determine a, b astfel încât graficul funcţiei să admită la $+\infty$ asimptota $y = x + 4$.
2) Pentru a, b determinaţi la 1) să se precizeze domeniile de definiţie, de continuitate şi derivabilitate ale lui f.
3) Pentru a, b de la 1) se cere aria delimitată de graficul funcţiei, axa Ox şi $x = 5$, $x = 6$.

Probleme date la examenul de bacalaureat

1. I. 1. Se dă ecuaţia algebrică: $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$.
a) Să se rezolve ecuaţia ştiind că suma primelor două rădăcini este egală cu opusa mediei aritmetice a celorlalte două.
b) Să se arate că imaginile A, B, C, D ale numerelor complexe $Z_1 = 1 - 2i$, $Z_2 = 1 + 2i$, $Z_3 = -2 + i$, respectiv $Z_4 = -2 - i$ în planul complex sunt puncte ale unui cerc căruia se cere să i se determine ecuaţia.
c) Să se reprezinte în planul complex punctele A, B, C, D şi să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este un trapez isoscel.

2. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} (1+a)x + by + cz + dt = 0 \\ ax + (1+b)y + cz + dt = 0 \\ ax + by + (1+c)z + dt = 0 \\ ax + by + cz + (1+d)t = 0 \end{cases}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ şi } 1+a+b+c+d \neq 0$$

II. 1. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + X + \hat{3}$, $g = \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{4}$. Să se afle câtul şi restul împărţirii lui f la g.

2. Fie mulţimea $G = \{f_n : (2, \infty) \to \mathbb{R} \mid f_n(x) = 2 + (x-2)^{2^n},\ n \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ izomorf cu grupul aditiv $(\mathbb{Z}, +)$ (" $\circ$ " este operaţia de compunere a funcţiilor).

III. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln x - 1}{x}$.
a) Să se calculeze limitele funcţiei f în 0 şi la $+\infty$.
b) Determinaţi asimptota oblică la graficul funcţiei f spre $+\infty$; cercetaţi dacă asimptota intersectează graficul funcţiei şi, în caz afirmativ, determinaţi coordonatele punctului de intersecţie.
c) Aflaţi coordonatele punctului în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu asimptota oblică de ecuaţie $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
d) Calculaţi $I_n = \int_{e^{\frac{n+1}{2}}}^{e^{\frac{n+2}{2}}} [f(x) - (-\frac{1}{2}x + 3)]dx$ şi arătaţi că (I_n) este o progresie aritmetică, a cărei raţie o veţi preciza ($n \in \mathbb{N}$).
(Bacalaureat, clase de matematică-fizică, informatică, metrologie, sesiunea iunie 1995)

2. I. 1. Se dă sistemul de ecuaţii liniare: $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 2 \\ x + y + \alpha z = 3. \end{cases}$
Să se determine mulţimea valorilor lui $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul admite o singură soluţie şi să se afle soluţia respectivă.

2. Fie o progresie geometrică cu primii nouă termeni pozitivi în care al treilea şi al cincilea termen sunt, respectiv cea mai mică şi cea mai mare soluţie a ecuaţiei: $\frac{1}{2}[1+\log_4(3x-2)] = \log_4(1+\sqrt{10x-11})$.
Să se calculeze suma primilor nouă termeni ai progresiei geometrice.

II. 1. Fie H mulţimea matricelor de forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că $(H, \cdot)$ este grup abelian (" $\cdot$ " este operaţia de înmulţire a matricelor).
b) Să se arate că grupurile abeliene $(H, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, +)$ sunt izomorfe.

2. Să se determine polinomul de gradul trei $f \in \mathbb{R}[X]$ ştiind că restul împărţirii sale la fiecare din binoamele $X-1$, $X+1$, $X+2$ este 3.

III. 1. Să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}.$$

2. Să se calculeze aria mulţimii:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le f(x)\}.$$

(Bacalaureat, clase profil economic, sesiunea iunie 1995)

3. I. 1. Să se reprezinte grafic funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ şi să se calculeze $\int_1^{x^2} f(x)\mathrm{d}x$.

II. 1. Să se discute şi să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + y + z = 1 \\ x + (1+\lambda)y + z = \lambda \\ x + y + (1+\lambda)z = \lambda^2. \end{cases}$$

2. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

III. 1. Fie $G = (0, \infty) - \{1\}$. Arătaţi că: $(x, y) \to x * y \overset{\text{def}}{=} x^{\ln y}$ este o lege de compoziţie pe G şi că $(G, *)$ este grup comutativ.

2. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2, \ m \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

a) Să se arate că vârfurile paralelelor asociate acestor funcţii se găsesc

pe dreapta de ecuaţie $y = x + 1$.

b) Dacă A şi B sunt punctele de intersecţie ale unei parabole oarecare cu $x'x$ şi F proiecţia vârfului V al parabolei pe axa $x'x$ să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbb{R} - \{0\}$, $AB = 2FV$.

c) Să se arate că parabolele definite prin $f_m(x)$ trec printr-un punct fix.

(Bacalaureat, clase de matematică-fizică, informatică şi metrologie, sesiunea iunie 1996)

4. I. 1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + px - 1}{x + 1}$, $p \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine p astfel încât graficul funcţiei f să admită asimptota oblică $y = x + 1$;

b) Să se reprezinte grafic funcţia: $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$.

Să se afle aria mulţimii $\Gamma_{f,g}$ unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$, $x \in [0, 1]$.

II. 1. Să se discute după parametrul real m şi să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} (m+1)x + y + z = 0 \\ x + 2(m-1)y + z = 0 \\ (m-1)x - y + z = 0. \end{cases}$

2. În dezvoltarea binomului $(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ suma coeficienţilor ultimilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle valorile lui x pentru care suma dintre termenul al treilea şi al cincilea este egală cu 135.

III. 1. Să se afle rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 2X^3 - 7X^2 + 7X + a$, $a \in \mathbb{R}$, ştiind că ele formează o progresie geometrică.

2. Fie $\mathbb{Z}_{12}$ inelul claselor de resturi modulo 12 şi G mulţimea elementelor inversabile ale acestui inel.

a) Determinaţi elementele mulţimii G şi arătaţi că G este o parte stabilă în raport cu înmulţirea în $\mathbb{Z}_{12}$.

b) Alcătuiţi tabla operaţiei induse pe G şi deduceţi că $(G, \cdot)$ este grup.

(Bacalaureat, clase cu profil economic, sesiunea iunie 1996)

5. I. 1. Fie $G = (2, \infty)$. Arătaţi că $(x, y) \to x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 2x - 2y + 6$ determină pe $(G, *)$ o structură de grup abelian.

2. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to (2, \infty)$, $f(x) = e^{ax} + 2$, este un izomorfism între grupul aditiv al numerelor reale nenule şi grupul $(G, *)$ pentru orice a real nenul.

II. Se consideră funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - \ln(x + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Demonstraţi că funcţia f are două puncte de extrem dacă şi numai

dacă $\beta - 2\alpha > 2\sqrt{-2\alpha} > 0$.

2. Pentru $\alpha = -\beta = -1$, trasaţi graficul funcţiei f.

3. Calculaţi aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f şi axa Ox pentru $\alpha \in [-\frac{1}{2}, 0]$.

III. 1. Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} \log_3(\lg x + \lg y) - \log_9(\lg y) = 1 \\ \log_3(\lg x - \lg y) - \log_3(\lg y) = 0. \end{cases}$

2. Determinaţi rangul matricei $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & m & 1 \\ & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & m \end{pmatrix}.$$

(Bacalaureat, clase de matematică-fizică, informatică, metrologie, sesiunea iunie 1997)

6. I. 1. (1p) Să se rezolve ecuaţia $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 3 \cdot 9^x$.

2. (1,75p) Se consideră mulţimea $G = (2, \infty)$ pe care se defineşte legea $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, $\forall x, y \in G$. Să se demonstreze că " $*$ " este lege de compoziţie pe G şi că $(G, *)$ este grup abelian. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to (2, \infty)$, $f(x) = e^x + 2$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(G, *)$.

3. (1,75p) Să se discute după parametrul real m şi să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \| x + y + z = 1. \end{cases}$

II. 1. (2p) Se consideră funcţia definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + (m-2)x - m + 2}$, m parametru real.

a) Se cere să se determine mulţimea valorilor lui m pentru care domeniul de definiţie al funcţiei coincide cu domeniul de derivabilitate.

b) Pentru $m = 3$ să se reprezinte grafic funcţia obţinută.

2. (1,5p) Se consideră şirul $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Fără a calcula integrala, să se arate că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton şi mărginit.

b) Să se arate, folosind integrarea prin părţi, că $a_n = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

c) Să se calculeze I_3.

III. (1p) Să se determine ecuaţia cercului ce trece prin punctele $A(-1, 5)$, $B(-2, -2)$ şi $C(5, 5)$ precizând coordonatele centrului şi raza acestui cerc.

(Varianta 6, clase cu profil matematică-fizică, informatică, metrologie, iunie 1998)

7. 1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-2)x^2-2mx+2m-3$, $m\in\mathbb{R}-\{2\}$. Să se determine m, astfel încât inegalitatea $f(x)\leq 0$ să fie adevărată pentru price x real.

2. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, ştiind că al patrulea termen al dezvoltării $\left(2^{\frac{1}{2(1+\lg x)}}+x^{\frac{1}{12}}\right)^6$ este egal cu 200.

3. Se consideră polinomul $P=\begin{vmatrix} 2X & -2X & 1 \\ 1-X^2 & X^2 & -1 \\ -2X-a+2 & X+a & X-2 \end{vmatrix}$.

Să se determine parametrul real a pentru care polinomul admite rădăcină dublă întreagă.

II. Se consideră funcţia $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$, D domeniul maxim de definiţie.

1. Să se determine $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, astfel încât graficul funcţiei să admită asimptotele $x=3$ şi $y=x+2$, iar punctul $A(1,1)$ să se afle pe grafic.

2. Pentru $a=1$, $b=-1$, $c=-2$, $d=-3$ să se reprezinte grafic funcţia obţinută. Să se discute numărul rădăcinilor ecuaţiei $f(x)=m$.

III. Să se afle coordonatele punctelor de intersecţie ale cercului de ecuaţie $x^2+y^2=16$ cu parabola de ecuaţie $y^2=6x$. Să se afle aria fiecărei regiuni determinată de parabolă în interiorul cercului.

(Varianta 1, clase cu profil economic, sesiunea iunie 1998)

8. I. 1. (1p) Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

2. (1p) Să se rezolve inecuaţia $\log_2(9-2^x)>3-x$.

3. (2p) Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se determine parametrul real a astfel încât matricea A să fie inversabilă.

b) Pentru $a=1$ să se determine inversa matricei A.

c) Să se rezolve ecuaţia matriceală

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

precizând în prealabil tipul matricei X.

II. 1. (3p) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+m}{x^2}$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine m astfel încât funcţia să aibă un extrem local în $x=2$.

b) Pentru $m=4$, să se studieze variaţia şi să se reprezinte grafic funcţia obţinută.

c) Să se calculeze numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x^3-\lambda x^2-3x^2+4=0$ după valorile parametrului real λ.

2. Să se calculeze primitivele funcţiei $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

Să se determine primitiva F cu proprietatea $F(e^{e-1})=2$.

III. (1p) Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin punctele $A(1,2)$, $B(2,0)$ şi are centrul pe dreapta de ecuaţie $y=x-3$.

(Varianta 6, clase cu profil economic, sesiunea iunie 1998)

9. I. (40 puncte) 1. (10p) Se consideră dezvoltarea $(x^2+\dfrac{1}{x})^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$, ştiind că suma primilor trei coeficienţi ai dezvoltării este 46.

b) Pentru $n=9$, verificaţi dacă există un termen al dezvoltării care nu conţine pe x.

2. (12p) Se consideră relatia $x^2+2tx-3t^2=0$.

a) Determinaţi x în funcţie de t.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia:
$(z^2+2z+1)^2+2z(z^2+2z+1)-3z^2=0$.

3. (18p) Se consideră sistemul (S) $\begin{cases}3x+4y+z+2t=3\\6x+8y+2z+5t=7\\9x+12y+3z+10t=13.\end{cases}$

a) Sistemul admite soluţiile $x=-1$, $y=1$, $z=0$, $t=1$, respectiv $x=1$, $y=0$, $z=-2$, $t=1$? Justificaţi răspunsul.

b) Să se rezolve sistemul.

II. (36p) 1. (24p) Se consideră expresia $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

a) Să se reprezinte grafic funcţia f.

b) Să se discute în funcţie de parametrul real m numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x)=m$.

2. (12p) a) Se consideră funcţia $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $(a>0)$, continuă.

1. Dacă f este funcţie pară, atunci $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

2. Dacă f este funcţie impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

b) Să se calculeze următoarele integrale.

$I = \int_{-2}^{2} x^2 e^{|x|}\mathrm{d}x$ şi $J = \int_{-2}^{2} x^3 e^{|x|}\mathrm{d}x$.

III. (14p) În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $M(5,0)$ şi elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Reprezentaţi elipsa şi precizaţi, prin calcul, poziţia punctului M faţă de elipsă.

b) Să se determine coordonatele punctelor P situate pe elipsă, astfel încât tangenta în P la elipsă să treacă prin M. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsă. Determinaţi pantele tangentelor.

(Varianta 4, clase cu profil economic, fizică-chimie, chimie-biologie, iunie 1999)

10. I. 1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali

$f = 2X^3 - 3X^2 - 17X + 30$.

(3p) a) Să se calculeze $f(2)$.

(3p) b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X - 2$.

(4p) c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

(5p) 2. Să se rezolve ecuaţia $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x + 30 = 0$.

(10p) 3. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (6t^2 - 6t - 17)\mathrm{d}t + 30 = 0$.

4. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3,4)$, $B(5,-2)$ şi C mijlocul segmentului $[AB]$.

(4p) a) Să se determine coordonatele punctului C şi lungimea segmentului $[AB]$.

(3p) b) Să se scrie ecuaţia cercului de diametru $[AB]$.

(3p) c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(4,5)$.

II. 1. În mulţimea matricelor pătratice de ordin trei peste $\mathbb{C}$, se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4p) a) Să se determine matricele A^2 şi A^3.

(3p) b) Să se demonstreze că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ determinantul matricei $I_3 + zA$ este egal cu 1.

(3p) c) Să se demonstreze că $I_3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2)$.

(3p) d) Să se arate că matricea $I_3 + A$ este inversabilă şi să se precizeze inversa sa.

(6p) 2. a) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, are loc identitatea $x + x^2 + ... + x^n = \dfrac{x^{n+1} - x}{x - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(6p) b) Derivând ambii termeni ai identităţii de la a) să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, este adevărată relaţia

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

III. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie: $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(4p) a) Să se arate că legea " $*$ " este asociativă şi comutativă.

(3p) b) Să se determine elementul neutru al legii " $*$ ".

Se consideră mulţimea $G = (3, \infty)$.

(4p) c) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea " $*$ ".

(4p) d) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea $\underbrace{x * x * ... * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

IV. Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$, şi se defineşte şirul $(I_n)_n$ astfel: $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

(3p) b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

(2p) c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.

(2p) d) Utilizând punctele b) şşi c) să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $5I_{n+2} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq 5I_n$.

(2p) e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\dfrac{1}{5(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{5(n-1)}$.

(2p) f) Să se arate că $\lim\limits_n nI_n = f(1)$.

Se acordă 10p din oficiu.

(Varianta 7, clase cu profil matematică-fizică, informatică, metrologie, iunie 2000)

11. I. 1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali
$f = X^3 - 2X^2 - 5X - 6$.

(3p) a) Să se calculeze $f(x)$.

(3p) b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X - 1$.

(4p) c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

(5p) 2. Să se rezolve ecuaţia $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$, $x > 0$.

(10p) 3. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (3t^2 - 4t - 5)\mathrm{d}t + 6 = 0$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii: $d_1 : 3x - 2y = 0$, $d_2 : x + 3y - 11 = 0$, $d_3 : 2x - 3y + 5 = 0$.

(3p) a) Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.

(4p) b) Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.

(3p) c) Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0,0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

II. 1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX - 1$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

(6p) a) Să se arate că $S_3 - S_2 + aS_1 - 3 = 0$.

(6p) b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = 1$.

2. Pentru orice $x \in [0,1)$ se defineşte suma
$S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + \ldots + x^{n-1}\sqrt{1-x}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \sqrt{1-x}\dfrac{1-x^n}{1-x}$, $x \in [0,1)$.

(4p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$.

(5p) c) Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{1-x}\mathrm{d}x$.

III. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

(3p) a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.

(3p) b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$.
Se consideră mulţimea $G = \{X(a) \mid a > -1\}$.

(3p) c) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

(2p) d) Să se dtermine $(X(1))^2$.

(4p) e) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(X(1))^n = X(2^n - 1)$.

IV. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

(3p) a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^4}$.

(6p) b) Să se determine f' şi f''.

(2p) c) Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$ şi $f'(x) < 0$, $\forall x < 0$.

(2p) d) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

(2p) e) Pentru funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$, să se arate că aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, este mai mare decât $\frac{5}{6}$.

(Varianta 9, clase cu profil matematică-fizică, informatică şi metrologie, iunei 2000)

12. I. 1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali
$f = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$.

(4p) a) Să se calculeze $f(-1)$.

(5p) b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X + 1$.

(6p) c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

(10p) 2. Să se rezolve ecuaţia $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 4$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$, $B(-3, -4)$ şi $C(3, -4)$.

(3p) a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$.

(4p) b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

(3p) c) Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

II. 1. Se consideră mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie $x * y = 4xy - 4x - 4y + 5$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(4p) a) Să se arate că legea " $*$ " este asociativă şi comutativă.

(4p) b) Să se determine elementul neutru al legii " $*$ ".

Fie mulţimea $G = (1, \infty)$.

(4p) c) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea " $*$ ".

2. Se consideră funcţia $g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 1 + \frac{1}{1 - x}$.

(5p) a) Să se determine $g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

(4p) b) Să se determine asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei g.

(4p) c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$.

III. (4p) 1. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} =$
$= (y-x)(z-x)(z-y)$.

2. Se consideră a, b, c numere reale distincte două câte două. Se definesc funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ şi $g(x) = x^2 - 2x + 3$.
(4p) a) Să se arate că $f'(a) = (a-b)(a-c)$.
(4p) b) Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \end{vmatrix} =$
$= (b-c)(c-a)(c-b)$.
(3p) c) Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie deduceţi identitatea $\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} = 1$.

IV. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$ şi $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4+x^2}\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$.
(4p) a) Să se calculeze I_0 şi I_1.
(4p) b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este adevărată relaţia:
$4I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
(4p) c) Să se arate că pentru orice $x \in [0,1]$, $0 \leq \frac{x^n}{4+x^2} \leq x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
(3p) d) Să se determine limita şirului $(I_n)_{m \geq 1}$.
(Varianta 2, clase cu profil economic, fizică-chimie, chimie-biologie, iunie 2000).

13. I. 1. a) (5p) Să se verifice identitatea:
$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
b) (3p) Să se arate că dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, atunci $x = y = z$.
c) (2p) Să se rezolve ecuaţia $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{-x}$.
a) (4p) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) (2p) Să se studieze semnul funcţiei f'.
c) (2p) Să se arate că $f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
d) (2p) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $A(1,1)$ şi dreapta $d: 5x + 12y + 9 = 0$.

a) (4p) Să se calculeze distanţa de la punctul A la dreapta d.
b) (4p) Să se scrie ecuaţia cercului C cu centrul în A şi care este tangent dreptei d.
c) (2p) Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

II. 1. În inelul $\mathbb{Z}_6[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 - X$. Notăm cu A, $A \subset \mathbb{Z}_6$, mulţimea rădăcinilor polinomului f.
a) (4p) Să se verifice că $A = \mathbb{Z}_6$.
b) (2p) Să se găsească un polinom nenul $g \in \mathbb{Z}_6[X]$, $g \neq \pm f$, care să aibă mai multe rădăcini decât gradul său. Notăm cu $S_k = \hat{1}^k + \hat{2}^k + ... + \hat{5}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.
c) (2p) Să se calculeze S_1 şi S_2.
d) (2p) Să se arate că $S_k \in \{\hat{1}, \hat{3}\}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcţiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ şi $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
a) (5p) Să se verifice că $f(x) = x - \dfrac{x}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) (3p) Să se determine $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
c) (2p) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{F(x)}{xf(x)}$.

III. Se consideră mulţimea $G = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ pe care se defineşte legea de compoziţie " $\circ$ " prin $(a_1, x) \circ (a_2, x) = (a_1a_2, a_1x_2 + x_1)$.
a) (4p) Să se arate că $((a_1, x_1) \circ (a_2, x_2)) \circ (a_3, x_3) =$
$= (a_1, x_1) \circ ((a_2, x_2) \circ (a_3, x_3))$, $\forall (a_1, x_1), (a_2, x_2), (a_3, x_3) \in G$.
b) (6p) Să se verifice că $(a, x) \circ (1, 0) = (1, 0) \circ (a, x) = (a, x)$, $\forall (a, x) \in G$.
c) (4p) Să se verifice că $(a, x) \circ (\frac{1}{a}, -\frac{x}{a}) = (\frac{1}{a}, -\frac{x}{a}) \circ (a, x) = (1, 0)$, $\forall (a, x) \in G$.
d) (2p) Să se găsească două elemente (a_1, x_1) şi (a_2, x_2) din mulţimea G pentru care $(a_1, x_1) \circ (a_2, x_2) \neq (a_2, x_2) \circ (a_1, x_1)$.
e) (4p) Să se demonstreze că $\forall (a, x) \in G$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, există $(u, v) \in G$ astfel încât $\underbrace{(u, v) \circ (u, v) \circ ... \circ (u, v)}_{\text{de } n \text{ ori } (u,v)} = (a, x)$.

IV. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$ şi funcţiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx$ şi $F(x) = a_1 \sin x + \dfrac{a_2}{2} \sin 2x + ... + \dfrac{a_n}{n} \sin nx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
a) (4p) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

b) (3p) Să se verifice că $F(k\pi) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
c) (4p) Să se arate că dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $F(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
d) (3p) Să se arate că dacă $F(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Notăm $J(p,q) = \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx dx$, $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$.
e) (4p) Utilizând formula $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $J(p,q) = 0$, dacă $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi $J(p,q) = \pi$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.
f) (2p) Să se demonstreze că dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.
(Varianta 1, clase cu profil matematică-fizică, informatică şi metrologie, iunie 2001)

14. I. 1. În mulţimea permutărilor cu cinci elemente S_5 se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
a) (4p) Să se determine numărul de inversiuni ale permutării σ.
b) (3p) Să se determine τ^{-1}.
c) (3p) Să se rezolve în S_5 ecuaţia $\tau x = \sigma$.

2. a) (3p) Să se verifice identitatea $\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$, $\forall x > 0$.
Notăm cu $a_n = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
b) (2p) Să se arate că $a_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
c) (3p) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
d) (2p) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{n^2}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(2n, 3n+2)$, $n \in \mathbb{N}$.
a) (4p) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.
b) (3p) Să se arate că punctul A_n se află pe dreapta A_0A_1, $\forall n \in \mathbb{N}$.
c) (3p) Să se arate că lungimea segmentului $[A_nA_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, nu depinde de n.

II. 1. Se consideră polinoamele cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_3$, $f = \hat{a}X + \hat{b}$ şi $g = X^6 + X^3 + \hat{1}$.
a) (3p) Să se verifice că pentru orice $\hat{a} \in \mathbb{Z}_3$ avem $\hat{a}^3 = \hat{a}$.
b) (2p) Să se arate că $(f(X))^3 = f(X^3)$.
c) (3p) Să se verifice că $X^2 + X + \hat{1} = (X + \hat{2})^2$.
d) (2p) Să se descompună polinomul g în factori ireductibili în inelul $\mathbb{Z}_3[X]$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arctg}(x+2) - \text{arctg}x$.

a) (3p) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) (3p) Să se arate că $x = -1$ este punct de maxim local pentru funcţia f.

c) (2p) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

d) (2p) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

III. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 3y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$ şi matricele

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notăm cu A matricea sistemului.

a) (6p) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) (6p) Să se rezolve sistemul.

c) (2p) Să se găsească o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B \neq O_3$ astfel încât $AB = O_3$.

d) (4p) Să se arate că $A^n \neq I_3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) (2p) Să se arate că $\det(A + \frac{1}{n} I_3) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

IV. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) (4p) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) (4p) Folosind teorema lui Lagrange, să se arate că există $c(a)$, care depinde de a, $c(a) \in (2,3)$ şi $d(a)$, care depinde de a, $d(a) \in (4,5)$ astfel încât să avem $3^a - 2^a = a(c(a))^{a-1}$ şi $5^a - 4^a = a(d(a))^{a-1}$.

c) (4p) Să se arate că pentru orice funcţii $g : \mathbb{R} \to (2,3)$ şi $h : \mathbb{R} \to (4,5)$ ecuaţia $x(g(x))^{x-1} = x(h(x))^{x-1}$ are numai soluţiile $x = 0$ şi $x = 1$.

d) (4p) Să se rezolve ecuaţia $3^a + 4^a = 2^a + 5^a$, $a \in \mathbb{R}$.

e) (2p) Să se demonstreze că $3^x + 4^x > 2^x + 5^x$, $\forall x \in (0,1)$.

f) (2p) Să se demonstreze că $\frac{2}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 4} > \frac{1}{\ln 2} + \frac{4}{\ln 5}$.

(Varianta 5, clase cu profil matematică-fizică, informatică şi metrologie, iunie, 2001)

15. I. 1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$.

a) (3p) Dezvoltând determinantul d, să se arate că $d = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b) (2p) Utilizând proprietăţile determinanţilor, să se arate că:

$d = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

c) (3p) Să se demonstreze identitatea:

$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.

d) (2p) Să se rezolve ecuaţia $8^x + 27^x + 125^x = 3 \cdot 30^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arctg}x + \text{arcctg}x$.

a) (4p) Să se calculeze $f(0)$.

b) (3p) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) (3p) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,2)$ şi $C(-2,4)$.

a) (3p) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

b) (3p) Să se calculeze panta dreptei BC.

c) (4p) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

II. 1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = 2n-1$.

a) (2p) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ formează o progresie aritmetică şi să se calculeze raţia progresiei.

b) (2p) Să se determine valoarea numărului natural n pentru care $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2001^2$.

c) (3p) Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = 2^{a_n}$ formează o progresie geometrică.

d) (3p) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \dfrac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!}{(n+1)!}$.

a) (3p) Să se verifice identitatea $k\cdot k! = (k+1)! - k!$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

b) (2p) Să se arate că $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) (3p) Să se calculeze $\lim\limits_n a_n$.

d) (2p) Să se calculeze $\lim\limits_n a_n^{(n+1)!}$.

III. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie " $\circ$ " definită prin $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

a) (4p) Să se verifice că $x \circ y = 2(x-1)(y-1)+1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) (4p) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) (4p) Să se arate că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) (4p) Să se stabilească dacă mulţimea $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea " $\circ$ ". Justificaţi răspunsul.

e) (4p) Să se rezolve ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x \circ x = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

IV. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$.

a) (4p) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) (4p) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) (4p) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x > 0$.

d) (4p) Să se deducă inegalitatea $e^x \geq x^e$, $\forall x > 0$.

e) (4p) Să se demonstreze că $e^x > \dfrac{x^{e+1}}{e+1} + 1$, $\forall x > 0$.

(Varianta 1, clase cu profil economic, fizică-chimie, chimie-biologie şi militar real, iunie, 2001)

16. I. 1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este un parametru real.

a) (4p) Să se determine punctul de minim şi valoarea minimă a funcţiei f.

b) (3p) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) (3p) Pentru $m = 1$, să se rezolve ecuaţia $(f \circ f)(x) = 0$.

2. a) (3p) Să se verifice identitatea $\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $\forall x > 0$.

Notăm cu $a_n = \dfrac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) (2p) Să se arate că $a_n = \dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) (3p) Să se calculeze $\lim\limits_n a_n$.

d) (2p) Să se calculeze $\lim\limits_n a_n^{n^2}$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,2)$ şi $C(0,4)$.

a) (3p) Să se scrie ecuaţia dreptei BC.

b) (3p) Să se determine panta dreptei AB.

c) (4p) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

II. 1. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X + 1$.

a) (4p) Să se calculeze $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ şi $f(2)$.

b) (3p) Să se arate că polinomul f are toate rădăcinile reale.

c) (3p) Să se demonstreze că rădăcinile polinomului f sunt numere iraţionale.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - ax - 1$, unde a este un parametru real. a) (3p) Să se calculeze $f'(x)$.

b) (2p) Să se calculeze $f(0)$ şi $f'(0)$.

c) (3p) Să se determine valorile lui a pentru care $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) (2p) Să se deducă inegalitatea $\int_0^1 2^{x^2}\mathrm{d}x \geq 1+\frac{\ln 2}{3}$.

III. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}4&-6\\2&-3\end{pmatrix}$, precum şi submulţimea $G=\{X(a)\mid a\in\mathbb{R}$ şi $X(a)=I_2+aA\}$.

a) (4p) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

b) (4p) Să se calculeze A^2.

c) (4p) Să se arate că $I_2\in G$.

d) (4p) Să se demonstreze că $X(a)X(b)=X(a+b+ab)$, $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$.

e) (4p) Să se demonstreze că $X(1)X(2)...X(2001)=X(2002!-1)$.

IV. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 0}$ definit prin $I_0=\int_0^1\frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x$ şi $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{2x+3}\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) (4p) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) (3p) Să se arate că $2I_{n+1}+3I_n=\frac{1}{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

c) (3p) Dacă $x\in[0,1]$ să se arate că $x^n\geq x^{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

d) (3p) Să se arate că $I_n\geq I_{n+1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

e) (4p) Să se deducă inegalităţile $\frac{1}{5(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{5n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

f) (3p) Să se calculeze $\lim\limits_n nI_n$.

(Varianta 4, clase cu profil economic, fizică-chimie, chimie-biologie şi militar real, iunie, 2001)

17. I. 1. Se consideră $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(x)=x^2+2x$.

(4p) a) Să se verifice că $f(x)=(x+1)^2-1, \forall\, x\in\mathbb{C}$.

(4p) b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $(f\circ f)(x)=0$.

(2p) c) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $(f\circ f\circ ...\circ f)(x)=(x+1)^{2^n}-1$, $\forall\, x\in\mathbb{C}$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

(3p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

(3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

3) În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele

$A_n(n,-n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(4p) a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

(3p) b) Să se arate că lungimea segmentului A_nA_{n+1} nu depinde de n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(3p) c) Să se arate că punctul A_n se află pe dreapta A_0A_1, $\forall n \in \mathbb{N}$.

II. 1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ x-3y+5z=0 \end{cases}$, unde $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Notăm cu A matricea sistemului.

(5p) a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(3p) b) Să se rezolve sistemul.

(2p) c) Să se găsească o soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0+2y_0+3z_0=8$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Admitem cunoscut că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$ şi considerăm şirurile $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ definite prin $b_n = a_n + \frac{1}{n}$ şi $c_n = a_n + \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(3p) a) Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

(3p) b) Să se arate că şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

(2p) c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{\pi^2}{6}$.

(2p) d) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a_n - \frac{\pi^2}{6}\right) = -1$.

III. Pentru orice număr natural nenul n, se consideră mulţimea de numere raţionale $H_n = \left\{ \frac{k}{n!} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(4p) a) Să se arate că dacă $x,y \in H_n$, atunci $x+y \in H_n$.

(4p) b) Să se verifice că dacă $x \in H_n$, atunci $-x \in H_n$.

(4p) c) Să se arate că dacă $n < p \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset H_p$.

(2p) d) Să se arate că pentru orice număr raţional r, există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $r \in H_n$.

(4p) e) Să se arate că dacă $(G,+)$ este subgrup al grupului $(Q,+)$ şi $\frac{1}{n!} \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $H_n \subset G$.

(2p) f) Să se demonstreze că dacă $G_1,\ldots,G_{2002}$ sunt subgrupuri ale grupului $(Q,+)$ şi $Q = G_1 \cup \ldots \cup G_{2002}$, atunci există $i \in \{1,\ldots,2002\}$ astfel încât $G_i = Q$.

IV. Se consideră numerele reale $a_1,a_2,\ldots,a_n$ şi funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a_1\sin x + a_2\sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$ şi

$F(x) = -a_1 \cos x - \frac{a_2}{2} \cos 2x - ... - \frac{a_n}{n} \cos nx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(4p) a) Să se arate că F este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

(4p) b) Să se verifice că $F(x + 2k\pi) = F(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2p) c) Utilizând rezultatul: "Dacă o funcţie $g : \mathbb{R} \to R$ este periodică şi monotonă atunci funcţia g este constantă, să se arate că dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci funcţia F este constantă.

(4p) d) Să se arate că dacă funcţia F este constantă, atunci $f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(4p) e) Notăm cu $S(p,q) = \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \mathrm{d}x$, $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$.

Utilizând formula: $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $S(p,q) = 0$, dacă $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi $S(p,q) = \pi$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

(2p) f) Să se demonstreze că dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

(Varianta 4, clase cu profil mat-fizică, informatică, metrologie, iunie, 2002)

18. I. 1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$\circ$" prin $x \circ y = x + y + 2$.

(4p) a) Să se verifice că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

(2p) b) Să se determine elementul $e \in \mathbb{R}$ pentru care $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2p) c) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$x_0 \circ x_1 \circ ... \circ x_n = x_0 + x_1 + ... + x_n + 2n$, $\forall x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

(2p) d) Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 \circ ... \circ C_n^n = 2n + 64$

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2xe^{x^2}$

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(3p) b) Să se determine intervalele de concavitate şi de convexitate ale funcţiei f.

(3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(3n, 2n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(4p) a) Să se scrie ecuaţia dreptei A_0A_1.

(3p) b) Să se calculeze lungimea segmentului A_0A_1.

(3p) c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, punctul A_n se găseşte pe dreapta A_0A_1.

II. 1. În mulţimea permutărilor cu 4 elemente, S_4, considerăm

permutările: $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ precum şi submulţimea $H = \{x \in S_4 | x^2 = e\}$.

(4p) a) Să se verifice că $e \in H$.

(4p) b) Să se arate că $\sigma, \tau \in H$.

(2p) c) Să se arate că $\sigma\tau \notin H$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(3p) a) Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

(4p) b) Să se verifice că $f(x + 2n\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(3p) c) Utilizând rezultatul: "Dacă o funcţie periodică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, are limită la infinit, atunci funcţia este constantă", să se arate că, dacă $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, atunci $a = b = c = 0$.

III. Se consideră polinoamele $f = X^5 - 1$, $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

(4p) a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

(4p) b) Să se verifice că $g = \left(X^2 + aX + 1\right)\left(X^2 + bX + 1\right)$, unde $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(4p) c) Să se arate că polinomul g este ireductibil în $Q[X]$.

(2p) d) Se consideră polinomul cu coeficienţi raţionali $h = X^2 + pX + q$. Să se arate că dacă polinoamele f şi h nu sunt prime între ele, atunci ele au polinomul $X - 1$ drept cel mai mare divizor comun în $Q[X]$.

(4p) e) În mulţimea $\mathcal{M}_2(Q)$ se consideră matricile $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}$. Să se verifice că $A^2 - (r+u)A + (ru - st)I_2 = O_2$

(2p) f) Să se arate că dacă $A^5 = I_2$, atunci $A = I_2$.

IV. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) a) Să se verifice că $\frac{1}{1-a} = 1 + a + \ldots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R} - \{1\}$.

(4p) b) Să se deducă relaţia $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}$, $\forall x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(4p) c) Să se arate că $0 \leq \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} \leq x^{2(n+1)}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n + \mathbb{N}^*$.

(2p) d) Integrând inegalităţile de la punctul c), să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} \mathrm{d}x = 0.$$

(4p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$.

(2p) f) Integrând relaţia de la punctul b), să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$.

(Varianta 5, clase cu profil matematică-fizică, informatică, metrologie, iunie, 2002)

19. I 1. Se consideră polinomul $f = X^3 + 5X - 6$.

(4p) a) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X - 1$.

(3p) b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

(3p) c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x) \leq 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$

(3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(3p) b) Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(2p) c) Să se verifice că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = e^x \sin x$ este o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

(2p) d) Să se calculeze $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,2), B(2,1), C(3,3)$.

(4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului AB.

(3p) b) Să se calculeze panta dreptei AC.

(3p) c) Să se scrie ecuaţia dreptei AB.

II. 1. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie " $\circ$ " definită prin $x \circ y = x + y + 10$.

(4p) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

(2p) b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x \circ 4^x = 16$.

(2p) c) Să se găsească două elemente $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, pentru care $a \circ b \in \mathbb{N}$.

(2p) d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x^2 \circ x = 12$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+1}$.

(3p) a) Să se verifice că $f(x) = 1 + \frac{3}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(4p) c) să se determine asimtotele la graficul funcţiei f.

III. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricile A şi $I_2 =$ precum şi submulţimea $G\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) | AX = XA\}$.

(4p) a) Să se verifice că $A \in G$ şi $I_2 \in G$.

(4p) b) Să se găsească o matrice $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $T \in G$.

(4c) c) Să se verifice că $A^2 = -I_2$.

(4p) d) Să se arate că $A^2X = XA^2$, $\forall X \in \mathcal{M}_2()$.

(2p) e) Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{C}$, atunci matricea $B = aI_2 + bA \in G$.

(2p) f) Să se arate că dacă $X \in \gamma$, atunci există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = aI_2 + bA$.

IV. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln a - a \ln x$, $a > 0$.

(4p) a) Să se calculeze $f(x)'$, $x > 0$.

(4p) b) Să se calculeze $f(a)$ şi $f'(a)$.

(2p) c) Utilizând teorema lui Fermat să se determine $a > 0$ cu proprietatea $f(x) \geq 0$, $\forall x > 0$.

(4p) e) Să se arate că pentru $x > 0$ avem $e^x = x^e$ dacă şi numai dacă $x = e$.

(2p) f) Să se determine numerele reale $c, b > 0$ cu proprietatea că $c^x + b^x \geq x^c + x^b$, $\forall x > 0$.

(Varianta 5. clase cu profil economic, fizico-chimie, militar real, industrial, agricol, silvic, sportiv real, iunie, 2002)

20. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{2^{1^2}} + \frac{1}{2^{2^2}} + \frac{1}{2^{3^2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n^2}}$ şi $b_n = a_n + \frac{1}{2n \cdot 2^{n^2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Mulţimea $\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n < a_{n+1}\}$ este:

a) Formată dintr-un element; b) $\mathbb{N}^*$; c) $\emptyset$; d) Finită, având cel puţin 2 elemente.

2. Mulţimea $\{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n > b_{n+1}\}$ este:

a) $\mathbb{N}^*$; b) Finită, având cel puţin 2 elemente; c) Formată dintr-un element; d) $\emptyset$.

3. Ştiind că şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente, notăm $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Atunci $a - b$ este:

a) 0,5; b) 0; c) 0,25; d) 1.

4. Numărul $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ aparţine mulţimii:

a) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$; c) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$; d) $\mathbb{N}$.

În sistemul carteziam de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n, n^2)$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Panta dreptei A_0A_1 este:
   a) 2; b) 1; c) -2; d) -1.
6. Ecuaţia dreptei A_0A_1 este:
   a) $y = x^2$; b) $y = x$; c) $x^2 + y = 0$; d) $x + y = 0$.
7. Lungimea segementului A_1A_2 este:
   a) 10; b) $\sqrt{10}$; c) 3; d) 4.
8. Aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$ este:
   a) 2; b) n; c) 1; d) $n + 1$.
9. Numărul dreptelor care trec prin câte 2 puncte din mulţimea $\{A_1, A_2, \ldots, A_5\}$ este:
   a) 9; b) 8; c) 10; d) 20.
10. Câte triunghiuri au vârfurile în mulţimea $\{A_1, A_2, \ldots, A_5\}$?
    a) 15; b) 5; c) 20; d) 10.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.
Notăm prin $f^{(n)}(x)$ derivata de ordinul n a funcţiei f, în punctul x.

11. Care dintre elementele următoare este perioadă pentru funcţia f?
    a) π; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 2π; d) 3π.
12. Câte puncte de maxim local are funcţia f în intervalul $[0; 11\pi]$?
    a) 11; b) 5; c) 6; d) 10;
13. Aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 2\pi$ este:
    a) 0; b) 2; c) 4; d) 3.
14. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\int_0^x |f(t)|dt}{x}$ este: a) 0; b) $\frac{2}{\pi}$; c) 1; d) ∞.
15. Lungimea maximă a unui interval inclus în $[0; 2\pi]$ pe care funcţia f este convexă, este:
    a) $\frac{\pi}{2}$; b) π; c) 2π; d) $\frac{3\pi}{2}$.
16. $f^{(2004)}(0)$ este: a) 1; b) -1; c) 0; d) 0,5.

Se consideră polinomul $f = X^4 - 14X^2 + 9$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, elementul $a = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ şi mulţimile
$A = \{g(a) \mid g \in \mathbb{Z}[X]\}$, $B = \{g(a) \mid g \in \mathbb{Z}[X], \text{grad}(g) \leq 3\}$.

17. Care dintre elementele următoare **nu** este rădăcină a polinomului f?
    a) $-\sqrt{2} + \sqrt{5}$; b) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; c) $\sqrt{2} - \sqrt{5}$; d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
18. Suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ este: a) 4; b) 14; c) 0; d) -14.

19. Produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ este:

a) 0; b) 14; c) -9; d) 9.

20. Dacă $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}+r\sqrt{10}+s=0$, cu $p,q,r,s \in \mathbb{Q}$, atunci $2p+5q+$ $+10r+s$ este:

a) 0; b) 5; c) 7; d) 2;

21. Mulţimea $A-B$ este:

a) $\emptyset$; b) Infinită; c) Finită, având cel puţin 2 elemente; d) Formată dintr-un element.

Se consideră matricele $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Rangul matricei A este:

a) 4; b) 1; c) 3; d) 2.

23. Soluţia sistemului $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y+z+t=0 \\ z+t=0 \end{cases}$, $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, este:

a) $(-1,1,-1,1)$; b) $(1,1,-1,-1)$; c) $(1,0,\lambda,-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$; d) $(1,-1,1,-1)$.

24. Ecuaţia $AX=I_3$, cu $X \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$, are:

a) Nu are soluţie. b) O infinitate de soluţii. c) O singură soluţie. d) Un număr finit de soluţii strict mai mare decât 1

25. Matricea I_3A are suma elementelor

a) 9; b) 10; c) 0; d) 12.

26. Mulţimea $\{Y \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C}) \mid \det(YA) \neq 0\}$ este:

a) Vidă ; b) Formată dintr-un element; c) Formată dintr-un număr finit de elemente, cel puţin egal cu 2; d) Infinită.

27. Câte soluţii are în inelul $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia $\widehat{3}\widehat{x}=\widehat{0}$?

a) 1. b) 4. c) 2. d) 3.

28. Suma $\widehat{1}+\widehat{2}+\ldots+\widehat{5}$ calculată în $\mathbb{Z}_6$ este:

a) $\widehat{3}$; b) $\widehat{2}$; c) $\widehat{0}$; d) $\widehat{1}$.

29. Produsul $\widehat{1}\cdot\widehat{2}\cdot\ldots\cdot\widehat{5}$ calculat în $\mathbb{Z}_6$ este:

a) $\widehat{1}$; b) $\widehat{2}$; c) $\widehat{3}$; d) $\widehat{0}$.

30. Care este ordinul elementului $\widehat{2}$ în grupul $(\mathbb{Z}_6,+)$?

a) 2; b) 4; c) 6; d) 3.

(Varianta A, M1-Specializare matematică informatică, iunie, 2003 – Toţi itemii sunt obligatorii. Fiecare item are un singur răspuns corect. Se acordă câte 3 puncte pentru fiecare răspuns corect. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Pentru fiecare item se completează pe foaia de examen, răspunsul considerat corect, cu simbolul 0, iar pentru răspunsurile considerate greşite cu simbolul X.)

21. 1. Egalitatea $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ este adevărată:

a) Pentru orice $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ b) Numai dacă $a=b$ c) Numai dacă $a=d$ d) Numai dacă $a=c$

2. Dacă $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=0$, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, atunci:

a) $a+b+c+d=0$; b) $ad=bc$; c) $ac+bd=0$; d) $a+d=b+c$.

3. Numărul de elemente ale mulţimii $\{x \in \mathbb{R} \mid 5(x^4+x^2)=(2x^2+x)^2\}$ este:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

4. Suma pătratelor soluţiilor reale ale ecuaţiei $(4^x+25^x)(9^x+49^x) = (6^x+35^x)^2$ este:

a) 2; b) 5; c) 1; d) 0.

În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Matricea $AB-BA$ este:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Determinantul matricei A este:

a) 1; b) -1; c) -2; d) 0.

7. Matricea A^2 este:

a) I_2; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Inversa matricei A este:

a) I_2; b) A; c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

9. Rangul matricei $X = I_2 + A + A^2 + \ldots + A^{2003}$ este:

a) 0; b) 2004; c) 1; d) 2.

10. Mulţimea $\{n \in \mathbb{N}^* \mid (AB)^n = I_2\}$ este:

a) Vidă; b) Infinită; c) Finită, având cel puţin 2 elemente; d) Formată din exact un element.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}-\{-1,-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

11. Câte asimptote verticale are graficul funcţiei f?

a) 2; b) 1; c) 3; d) 0.

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ este:

a) $-0,75$; b) 1; c) 0,75; d) -1.

13. Expresia $f(x) - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$, $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1,-2\}$ este:

a) $2f(x)$; b) 0; c) $\frac{2}{x+2}$; d) $\frac{-2}{x+1}$.

14. Care este mulţimea valorilor lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$?

a) $\mathbb{N}^*$; b) $\emptyset$; c) Este formată din exact un element; d) Este finită, conţinând cel puţin 2 elemente.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} (f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$ este:

a) ∞; b) 2; c) 1; d) 0,5.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(f(1) + f(2) + \ldots + f(n) - \frac{1}{2}\right)$ este:

a) -1; b) ∞; c) 1; d) $-\infty$.

17. Suma $1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \ldots + \mathrm{i}^{2003}$ este:

a) 0; b) $1 + \mathrm{i}$; c) i; d) 1.

18. Produsul $1 \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{i}^{2003}$ este:

a) 1; b) -1; c) $-\mathrm{i}$; d) i.

19. Produsul $\cos 0^0 \cdot \cos 1^0 \cdot \ldots \cdot \cos 179^0 \cdot \cos 180^0$ este:

a) $\frac{1}{2^{30}}$; b) $\frac{1}{2^{10} \cdot 3^{10}}$; c) $-\frac{1}{2^{30}}$; d) 0.

20. Suma $1 + 2 + \ldots + 2003$ este:

a) $2002 \cdot 1002$; b) $2003 \cdot 1001$; c) $2003 \cdot 1002$; d) $2003 \cdot 2004$.

21. Suma $\widehat{0} + \widehat{1} + \widehat{2} + \ldots + \widehat{12}$ în $\mathbb{Z}_{13}$ este:

a) $\widehat{6}$; b) $\widehat{1}$; c) $\widehat{7}$; d) $\widehat{0}$.

Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 3$ şi $AC = 4$.

22. Lungimea ipotenuzei BC este:

a) 7; b) 5; c) $\sqrt{12}$; d) 6.

23. Aria triunghiului ABC este:

a) 8; b) 12; c) 9; d) 6.

24. $\cos B$ este:

a) 0,8; b) 0,6; c) 0,75; d) 0,7.

25. Lungimea înălţimii care cade pe ipotenuză este:

a) 4; b) 2,4; c) 2; d) 3.

26. Raza cercului circumscris triunghiului ABC este:

a) 2; b) 2,5; c) 3; d) 4.

Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n = n \int\limits_0^1 x^n \sin x \mathrm{d}x$.

27. $I_1 = \int\limits_0^1 x \sin x \mathrm{d}x$ este:

a) $\sin 1 + \cos 1$; b) $\sin 1$; c) $\cos 1 - \sin 1$; d) $\sin 1 - \cos 1$.

28. Dacă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^n g(x)\mathrm{d}x$ este:

a) 0; b) $g(1)$; c) $g(0)$; d) $g(0,5)$.

29. Egalitatea $I_n = \sin 1 - \int\limits_0^1 x^n(x\cos x + \sin x)\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$, este adevărată (se poate utiliza eventual metoda integrării prin părţi):

a) Pentru nici o valoarea a lui $n \in \mathbb{N}^*$; b) Pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$; c) Pentru un număr finit, strict mai mare decât 1, de valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$; d) Pentru exact o valoare a lui $n \in \mathbb{N}^*$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ este:

a) $\sin 1$; b) $\sin 1 - \cos 1$; c) $\cos 1$; d) $\sin 1 + \cos 1$.

(Varianta A, M1-Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera tehnologică, profil Ţehnic, toate specializările, iunie 2003 –

Toţi itemii sunt obligatorii. Fiecare item are un singur răspuns corect. Se acordă câte 3 puncte pentru fiecare răspuns corect. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Pentru fiecare item se completează pe foaia de examen, răspunsul considerat corect, cu simbolul 0, iar pentru răspunsurile considerate greşite cu simbolul X.

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

pag. 315. 1. Din $G'(x) = g(x)$, $(\forall)\, x > \frac{1}{2}$ rezultă $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. **Altfel** se integrează g. **2.** $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.** $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$. **4.** $F(x) = (3x^2 + x - 2)\sqrt{x+1} + 3$. **5.** Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ se deduce că $x = 0$ poate fi cel mult punct de discontinuitate de prima speţă pentru f, caz în care f nu ar avea proprietatea lui Darboux şi deci n-ar admite primitive pe $\mathbb{R}$. Deci se impune ca f să fie continuă şi în $x = 0$, ceea ce dă $\alpha = 0$. Cum este continuă pe $\mathbb{R}$ rezultă f are primitive pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\alpha = 0$. 2) 0. **6.** Din $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, rezultă $a = -\frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}; \frac{2}{5}$. **7.** Din enunţ $f(x) + 1 = (x-1)^4 q(x)$, $f(x) - 1 = (x+1)^4 r(x)$. Derivând aceste relaţii rezultă $f'(x) = (x-1)^3 g(x)$ şi $f'(x) = (x+1)^3 p(x)$. Cum f are gradul şapte şi din aceste ultime relaţii se deduce că f' are gradul şase şi deci $f'(x) = A(x-1)^3(x+1)^3$ sau $f'(x) = A(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)$. De aici prin integrare rezultă $f(x) = A(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x) + B$. Din $f(1) = -1$ şi $f(-1) = 1$ se deduc $A = \frac{35}{16}$, $B = 0$. **Altfel.** Din enunţ $f(x) = (x-1)^4(ax^3 + bx^2 + cx + d) - 1$

şi deci $g(x)=f(x)-1$ trebuie să aibă pe $x=-1$ rădăcină de ordinul patru. Din $g(-1)=g'(-1)=g''(-1)=g'''(-1)=0$ rezultă a,b,c,d. **8.** a) – b) Prin reducere la absurd. Se scriu funcţiile sub forma $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin x}{x}, & x\in(0,1]\\ 1, & x=0\end{cases}+$

$\begin{cases}0, & x\in(0,1]\\ -1, & x=0\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}, & x>0\\ 1, & x\le 0\end{cases}+\begin{cases}0, & x>0\\ -2, & x\le 0\end{cases}$. **Altfel.** Punctul $x=0$ fiind punct de discontinuitate de prima speţă pentru f, aceasta nu are proprietatea lui Darboux.

9. 1) $I_n=\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}-a^2I_{n-1}$; 2) $I_n=\dfrac{n}{n^2+1}e^x\cos^{n-1}x\sin x+\dfrac{1}{n^2+1}e^x\cos^n x+$ $+\dfrac{n(n-1)}{n^2+1}I_{n-2}$; 3) $I_n=x(\arccos x)^n-n(\arccos x)^{n-1}\sqrt{1-x^2}-n(n-1)I_{n-2}$. **10.** $G'(x)=g(x)$, $(\forall)\,x>0$ implică $a=1$, $c=0$, iar din $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}G(x)=1$ se obţine $b=0$. **11.** Funcţia f nu are proprietatea lui Darboux. Se ia $a=-1$, $b=1$ şi $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Funcţia $(f\circ f)(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}$. **12.** 1) Se arată că dacă $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1\neq x_2$, atunci $f(x_1)\neq f(x_2)$ în cele trei cazuri; f este şi surjectivă, deci inversabilă. Inversa este $f^{-1}(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. 2) Funcţia f este continuă în $x=1$, $x=2$; f nu este derivabilă în nici un punct; 3) f nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Se ia $a=\sqrt{2}$, $b=3$ şi $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\in$ $(f(3)=0, f(\sqrt{2})=\sqrt{2})$; **13.** 1) Funcţia are forma $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ x^3, & x\in(0,1]\\ x, & x>1\end{cases}$. Funcţia f nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$; 2) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$. O primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru f pe $\mathbb{R}$ este: $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & x\le 0\\ \dfrac{x^4}{4}, & x\in(0,1]\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}, & x>1.\end{cases}$ 3) Avem $\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_{0}^{1}x^3dx+\int_{1}^{2}xdx=\frac{53}{12}$. **14.** 1) Dacă $a=0$, atunci $f^{-1}(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1+x}, & x\ge 0\\ -\dfrac{x}{2}, & x<0.\end{cases}$ Dacă $a<0$, atunci $f^{-1}(x)=$ $\begin{cases}1-\sqrt{1+x}, & x\le 0\\ \dfrac{1}{a}+\sqrt{\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{a^2}}, & x<0.\end{cases}$ 2) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-x^2, & x\le 0\\ x^3-x^2, & x>0.\end{cases}$ 3) $(f^{-1})'(3)=\dfrac{1}{f'(-1)}=-\dfrac{1}{4}$; $(f^{-1})''(3)=\dfrac{1}{32}$. (Se derivează f^{-1}). **15.** 1) $a=-3$, $b=4$, $c=0$; 2) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă

a lui f. Atunci $F(x)=\begin{cases}2x^2, & x\le 0\\ -x^3+2x^2, & x\in(0,1)\\ -x^2+3x-1, & x\ge 1\end{cases}$ Avem: $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x =$

$=\int_{-2}^{0}(4x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(-3x^2+4x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(3-2x)\mathrm{d}x=-7=F(2)-F(-2).$

16. Avem $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\ge 1\\ \ln(2-x), & x<1.\end{cases}$ Cum $f'_s(1)=-1\neq f'_d(1)=1$, rezultă $(1,0)$ punct unghiular. 2) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F(x)=\begin{cases}x\ln x-x, & x\ge 1\\ (x-2)\ln(2-x)-x, & x<1.\end{cases}$ 3) $4\ln 2-2$. **17.** 1) $a=2e$, $b=-e$; 2) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}(x-1)e^x, & x\le 1\\ e(x^2-x), & x>1\end{cases}$, este o primitivă a funcţiei continue f pe $\mathbb{R}$. 3) $1+2e$. **18.** B). **19.** 1) $a=b^3$, $b=c$; 2) Funcţia $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in[1,2]$ dă $g'(x)>0$, ceea ce arată că g este strict crescătoare. Din $1\le x\le 2$ rezultă $g(1)\le g(x)\le g(2)$, care prin integrare pe $[1,2]$ dă inegalitatea cerută. **20.** 1) $a=5$, $b\in\mathbb{R}$; 2) $b=3$. **21.** Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$. O primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a funcţiei f este

$$F(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+x\right)\ln x-\left(\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{3x^2}{4}+x\right)+\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{13}{36}, & x\ge 1\\ \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x-x^2}+\dfrac{1}{8}\arcsin(2x-1), & x\in[0,1)\\ \dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{3}{8}x-\dfrac{3}{16}\ln(1-2x)-\dfrac{\pi}{16}, & x<0.\end{cases}$$

Acum $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. **22.** 2) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$. O primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a lui f pe $\mathbb{R}$ este

$$F(x)=\begin{cases}(x^2-5x+6)e^x+\dfrac{3}{8}\ln\dfrac{1}{2}-\dfrac{25}{4}, & x<0\\ \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x^2-x+1}+\dfrac{3}{8}\ln\left(x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right), & x\in[0,1]\\ \dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3x^2}{8}+\dfrac{3x}{8}-\dfrac{5\ln(2x-1)}{16}+\dfrac{3}{8}\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}, & x>1.\end{cases}$$

Acum $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. **23.** 1) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0,1\}$;

2) O primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a lui f este $F(x)=\begin{cases}x+\ln(1-x), & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}, & x\in(0,1)\\ -e^{-x}-\dfrac{x}{e}+\dfrac{2}{e}-\dfrac{1}{4}, & x\ge 1,\end{cases}$

pentru care $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. **24.** 1) Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$,

derivabilă pe $\mathbb{R}-\{1\}$; 3) O primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru f este: $F(x)=\begin{cases}-xe^{-x}, & x<1\\ \frac{\ln^3 x}{3}-\frac{1}{e}, & x\geq 1\end{cases}$ când $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. Avem $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=\frac{1}{3}\ln^3 2-\frac{1}{e}$.

25. 1) $f'_s(0)=f'_d(0)=+\infty$; 2) Semnul lui f' dă monotonia funcţiei pe un interval: pe intervalele $(-\infty,-1)$, $\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$, $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$, $(1,\infty)$ funcţia este strict crescătoare, iar pe intervalele $\left(-1,-\frac{1}{e^2}\right)$, $\left(\frac{1}{e^2},1\right)$ funcţia este strict descrescătoare; 4) O primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a lui f pe $\mathbb{R}$ este:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \frac{x^2}{2}\ln^2(-x)-\frac{x^2}{2}\ln(-x)+\frac{x^2}{4}, & x<0.\end{cases}$$

26. 1) Funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ (deci f este injectivă pe $\mathbb{R}$); f este surjectivă fiind continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$; inversa este $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$; 2) $g^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}\right]$, $n\in\mathbb{N}^*$ (inducţie matematică); 3) dacă $\lambda<0$, o soluţie $x_1\in(-1,0)$; $\lambda=0$ dă $x_1=0$; $\lambda>0$, $x_1\in(0,1)$; 4) $F:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{2}[x\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)]$.

27. 1) Este continuă în $x=-1$ şi $x=2$; f nu este derivabilă în nici un punct din $\mathbb{R}$. 2) Din $f((0,1))=\left\{\frac{3}{4}<f(x)<1\right\}\cup\{3\}$ rezultă că f nu duce intervalul într-un interval, ceea ce arată că f nu admite primitive pe $[0,1]$.

28. 1) Funcţia este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}^*$; 3) O primitivă a lui f pe $\mathbb{R}^*$ este $F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln x, & x>0\\ -\frac{1}{x}\ln(-x), & x<0\end{cases}$ şi deci $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$. **29.** 1) Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^*$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0,1\}$; 3) $F:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=\begin{cases}2\sqrt{1-x}+\ln\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, & x<0\\ 2\sqrt{1-x}+\ln\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}, & x\in(0,1]\\ 2\sqrt{x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}, & x>1.\end{cases}$$

30. 1) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}^*$; 3) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}-x+2\ln(e^x+1), & x\geq 0\\ x-2\ln(e^x+1)+4\ln 2, & x<0.\end{cases}$

31. 1) $I=[0,1)$; 2) Din $f'(x)>0$, $x\in(0,1)$ rezultă f strict crescătoare şi

deci injectivă. Din $f(0)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\infty$, f continuă rezultă $f([0,1))=$ $[0,\infty)$ adică f surjectivă. Inversa lui f este $f^{-1}(x)=\dfrac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$;

4) $\int f(x)\mathrm{d}x=(x+1)\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+C$. **32.** 1) Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0,1\}$; 3) $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=\begin{cases}(-x+2)e^x-2, & x<0\\ xe^{-x}, & x\in[0,1]\\ -xe^{-x}+\dfrac{2}{e}, & x>1.\end{cases}$$

33. 1) $a=2$, $b=c=d=0$, $e=-4$. Deci $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-4}$; 3) $16+4\ln\dfrac{21}{5}$. **34.** 1) Se demonstrează că $(1+x)^{\frac{1}{x}}<e$, $x>0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}\ln(1+x)<1$, $x>0\Leftrightarrow\ln(1+x)-x<0$, $x>0$; prima formă a inegalităţii se integrează pe $[0,1]$; 3) Se aplică formula de medie pentru integrale şi deci există $c\in[1,2]$ astfel ca $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=f(c)=(1+c)^{\frac{1}{c}}$. Au loc inegalităţile $\sqrt{2}<2^{\frac{1}{c}}<(1+c)^{\frac{1}{c}}<3^{\frac{1}{c}}<3$. **35.** 1) $a=1$, $b=-4$; 2) $D_f=\mathbb{R}-\{0,4\}$, $D_c=\mathbb{R}-\{0,4\}$, $D_d=\mathbb{R}-\{0,1,4\}$; 3) $\dfrac{19}{2}+\dfrac{63}{4}\ln 2+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{6}{5}$.

pag. 321. 1. I. 1. $x_1+x_2=-\dfrac{x_3+x_4}{2}$ plus relaţiile lui Viète dau soluţiile $x_1=1+2i$, $x_2=1-2i$, $x_3=-2+i$, $x_4=-2-i$ şi respectiv $x_1=1-2i$, $x_2=1+2i$, $x_3=-2-i$, $x_4=-2+i$; b) $|z_k|=\sqrt{5}$, $k=\overline{1,4}\Rightarrow x^2+y^2-5=0$; c) $CD\parallel AB$ şi $AD=BC=\sqrt{10}$; **2.** $\det(A)=1+a+b+c+d\neq 0\Rightarrow x=y=z=t=0$;
II. 1. $q=\hat{4}X^2+\hat{2}X+\hat{4}$, $r=X+\hat{2}$; **2.** $f_m\circ f_n=f_{m+n}$, $f_m=f_n\Leftrightarrow m=n$; $\varphi:\mathbb{Z}\to G$, $\varphi(n)=f_n$; **III.** a) $\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$; b) $y=-\dfrac{1}{2}x+3$; se rezolvă sistemul $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}x+3\\ y=-\dfrac{1}{2}x+3+\dfrac{2\ln x-1}{x}\end{cases}$ şi rezultă soluţia $x=\sqrt{e}$,
$y=-\dfrac{\sqrt{e}}{2}+3$ care sunt coordonatele punctului de intersecţie; c) $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow x=e\sqrt{e}$, $y=3+\dfrac{1-e^3}{2e\sqrt{e}}$; d) $I_n=\dfrac{2n+1}{4}$, $I_{n+1}-I_n=\dfrac{1}{2}$; **2. I. 1.** $\det(A)=$
$=(\alpha-1)^2(\alpha+2)\neq 0\Rightarrow\alpha\neq 1$ şi $\alpha\neq -2$ când $x=\dfrac{\alpha-4}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$, $y=\dfrac{2}{\alpha+2}$, $z=\dfrac{3\alpha}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$; **2.** Soluţiile ecuaţiei sunt $x_1=2$, $x_2=6$; $a_3=2$,

$a_5 = 6$; $a_1 = \frac{2}{3}$, $q = \sqrt{3} > 0$, $S_9 = a_1 \frac{q^9 - 1}{q - 1} = \frac{2(40\sqrt{3} + 121)}{3}$; **II. 1.** a) $A_a \cdot A_b = A_{a+b}$, $A_a = A_b \Leftrightarrow a = b$, $I_3 = A_0$; $\det(A_a) = 1 \neq 0 \Rightarrow A_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{-a}$; b) $f : H \to \mathbb{R}$, $f(A_a) = a$, $f(A_a A_b) = f(A_a) + f(A_b)$; f este şi bijectivă; **2.** $f = X^3 + aX^2 + bX + c$. Din $f(1) = f(-1) = f(-2) = 3$ rezultă $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$; **III. 1.** $y = 0$ a.o.; $x = -\sqrt{3}$ punct de minim, $x = \sqrt{3}$ punct de maxim; f fiind impară graficul este simetric în raport cu originea O a reperului; **2.** $\frac{\ln 4 - 1}{2}$; **3. I. 1.** $x = 0$ a.v., $x = e^2$ punct de maxim, $x = e^{\frac{8}{3}}$ punct de inflexiune; $4(x \ln x - x + 1)$; **II. 1.** $\det(A) = \lambda^2(\lambda + 3)$; $\lambda \in \mathbb{R} - \{-3, 0\}$, soluţie unică; $\lambda = 0$ şi $\lambda = -3$ sistem incompatibil; **2.** $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **III. 1.** $u = e$, $x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$; **2.** a) $x_V = -\frac{1+m}{m}$, $y_V = -\frac{1}{m}$ şi $y_V = x_V + 1$; b) $F(-\frac{m+1}{2}, 0)$, $A(-1, 0)$, $B(-\frac{m+2}{m}, 0)$, $AB = |x_B - x_A| = \frac{2}{|m|}$; c) $A(-1, 0)$; **4.** $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $n = 1 = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x) = p - 1$. Deci $p = 2$; b) $x = -1$, a.v., $y = x + 1$ a.o.; $\frac{1}{2} + \ln 2$; **II. 1.** $\det(A) = 6(m - 1)$; $m \neq 1$ numai soluţia banală $x = y = z = 0$; $m = 1$, $x = -\lambda$, $y = z = \lambda \in \mathbb{R}$; **2.** $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22$, $T_3 + T_5 = 135$, $n = 6$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; **III. 1.** $q = 2$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$; $q = \frac{1}{2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$; **2.** $G = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}\}$. **5. I. 1.** $e = 3$, $x' = \frac{2x - 3}{x - 2} \in G$; **II. 1.** $f'(x) = 0 \Rightarrow 2\alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + \beta - 1 = 0$ are două rădăcini reale distincte $\Leftrightarrow \Delta_x > 0 \Leftrightarrow (\beta - 2\alpha)^2 + 8\alpha > 0$, iar de aici $\beta - 2\alpha > 2\sqrt{-2\alpha}$, cu $-\alpha > 0$; **3.** $\frac{2 - \ln 8}{6}$; **III. 1.** $x = 100$, $y = 10$; **2.** $\operatorname{rang}(A) = 3$, $\forall m \in \mathbb{C}$. **6. 1.** $x = 0$; **2.** $e = 3$, $x' = \frac{2x - 3}{x - 2} \in G$; f bijectivă şi $f(x + y) = f(x) * f(y)$; **3.** $\det(A) = -(m + 2)(m - 1)^2$; $m \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$, $x = y = z = \frac{1}{m + 2}$; $m = -2$ sistem incompatibil; $m = 1$, $x = 1 - \lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; **II. 1.** a) $f'(x) = \frac{2x + m - 2}{3\sqrt[3]{(x^2 + (m-2)x - m + 2)^2}}$; $D_d = D \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x - m + 2 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (-2, 2)$; **2.** a) $a_n - a_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x (1 - \cos^2 x) dx \geq 0 \Rightarrow (a_n) \searrow$; b) $f(x) = \cos^{2n-1} x$, $g'(x) = \cos x$; c) $a_3 = \frac{5}{6} a_2$, $a_2 = \frac{3}{4} a_1 \Rightarrow$

$a_3 = \frac{5}{8}a_1$; $a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a_3 = \frac{5\pi}{32}$; **III.** $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$; $C(2,1)$, $R = 5$; **7. 1.** Se rezolvă sistemul $m < 2$, $\Delta \leq 0$; $(-\infty, 1]$; **2.** $T_4 = 200 \Rightarrow \lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0$; $x_1 = 10^{-4}$, $x_2 = 10$; **3.** $P(x) = 0$, $P'(x) = 0$, $P''(x) \neq 0$; $x = 1$ şi $a = 0$; **II. 1.** $x = 3$ a.v. $\Rightarrow 3 + d = 0 \Rightarrow d = -3$; $y = x + 2$ a.o. $\Rightarrow m = 1$ şi $n = 2$; $a = 1$, $b = -1$; $A(1,1) \in G_f \Rightarrow c = -2$; **2.** $m < 1$, $f(x) = m$ are două rădăcini reale; $m = 1$, $x_1 = x_2 = 1$; $m \in (1,9)$, $\emptyset$; $m = 9$, $x_1 = x_2 = 5$; $m > 9$, $f(x) = m$ are două rădăcini reale; **III.** Se rezolvă sistemul $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = 6x$; $x_1 = 2$, $y_1 = -2\sqrt{3}$, $x_1 = 2$, $y_2 = 2\sqrt{3}$; $A_1 = \frac{4(\sqrt{3} + 4\pi)}{3}$, $A_2 = A_{\text{cerc}} - A_1 = \frac{4(8\pi - \sqrt{3})}{3}$; **8. 1.** $x = 1$; **2.** $(0,3)$; **3.** a) $\det(A) = (a+2)(a^2 + a + 1) \neq 0$, $a \neq -2$; b) $a = 1 \Rightarrow \det(A) = 9 \neq 0$; c) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} A^{-1}$; **II. 1.** a) $f'(2) = 0 \Rightarrow m = 4$; b) $x = 0$ a.v., $y = x - 3$ a.o., $x = 2$ punct de minim local; c) Se aduce la forma $f(x) = \lambda$; $\lambda < 0$, ecuaţia are o singură soluţie; $\lambda = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 2$; $\lambda > 0$, ecuaţia are trei rădăcini reale;
2. $F(x) = \ln(1 + \ln x) + c$; $F(e^{e-1}) = 2 \Rightarrow c = 1$ şi deci $F(x) = \ln(\ln x + 1) + 1$; **III.** $C\left(\frac{13}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{130}}{2}$; $x^2 + y^2 - 13x - 7y + 22 = 0$; **9. I.** 1. a) $n = 9$; b) $T_7 = C_9^6$; **2.** a) $x_1 = -3t$, $x_2 = t$; b) $z^2 + 2z + 1 = x$, $(x + 3z)(x - z) = 0$, adică $(z^2 + 5z + 1)(z^2 + z + 1) = 0$, $z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $z_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$; **3.** a) Se înlocuiesc în ecuaţiile sistemului şi se constată că acestea se verifică de către cele două soluţii; b) $x = \frac{1 - 4\alpha - \beta}{3}$, $y = \alpha$, $z = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; **II. 1.** a) $y = x$ a.o., $x = 2$ punct de minim; b) $m < 3$, ecuaţia are o soluţie reală; $m = 3$, $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 < 0$; $m > 3$, trei soluţii distincte; **2.** b) $f(x) = x^3 e^{|x|}$ este impară şi deci $J = 0$, iar $f(x) = x^2 e^{|x|}$ este pară şi deci $I = 2\int_0^2 x^2 e^x dx = 4(e^2 - 1)$; **III.** a) Coordonatele lui M introduse în ecuaţia elipsei dau $\frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16} > 0 \Rightarrow M$ exterior elipsei; b) două puncte $P\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $Q\left(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)$; $y = -x + 5$, $m_{PM} = -1$; $y = x - 5$, $m_{QM} = 1$. **10. I. 1.** a) $f(2) = 0$; b) $q = 2X^2 + X - 15$, $r = 0$; c) $x \in \{-3, 2, \frac{5}{2}\}$; **2.** $e^x = t$; $\ln 2$, $\ln \frac{5}{2}$; **3.** $x \in \{-3, 2, \frac{5}{2}\}$; **4.** a) $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = 1$, $y_C = 1$; $AB = 10$; b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$; c) $3x + 4y - 37 = 0$; **II.** d) Conform cu c), $I_3 + A$ este inversabilă şi inversa este $I_3 - A + A^2$; **III.** b) $e = \frac{7}{2}$; **IV.** a) $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \text{arctg}(x+1)\Big|_0^1 = \text{arctg}2 - \text{arctg}1 = \text{arctg}\frac{2-1}{1+2\cdot 1} = \text{arctg}\frac{1}{3}$; $I_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - \text{arctg}\frac{1}{3}$; b) $I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$; c)

$x \in [0,1] \Rightarrow x^{n+1} \leq x^n$; d) Din b) şi c) $\Rightarrow 5I_{n+2} \leq I_{n+2} + 2I_{n+1} + 2I_n \Leftrightarrow 5I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 5I_n$; e) Din d) $\Rightarrow 5I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{5(n-1)}$, $n \geq 2$; $\frac{1}{n+1} \leq 5I_n \Rightarrow I_n \geq \frac{1}{5(n+1)}$; f) Se aplică criteriul "cleştelui"; $\frac{1}{5} = f(1)$. **11. I. 1.** a) $f(1) = 0$; b) $q = X^2 - X - 6, T = 0$; c) $x \in \{-2, 1, 3\}$; **2.** $t = \ln x$ şi avem ecuaţia de la 1. c) $\Rightarrow t \in \{-2, 1, 3\} \Rightarrow x \in \{e^{-2}, e, e^3\}$; **3.** Se obţine ecuaţia de la 1.c)$\Rightarrow x \in \{-2, 1, 3\}$; **4.** a) Se rezolvă sistemul $3x - 2y = 0$, $x + 3y - 11 = 0$ şi se obţine soluţia $x = 2$, $y = 3$; b) Coordonatele $x = 2$, $y = 3$ verifică ecuaţia dreptei d_3 şi deci $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{A\}$; c) $r = OA = \sqrt{13}$; $x^2 + y^2 - 13 = 0$; **II. 1.** a) Scriem că x_1, x_2, x_3 verifică ecuaţia $f(x) = 0$ şi se adună relaţiile; b) $S_3 = 1 \Leftrightarrow 4 - 3a = 1 \Leftrightarrow a = 1$; **2.** a) $S_n(x) = \sqrt{1-x}(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) = \sqrt{1-x}\frac{1-x^n}{1-x}$; b) Dacă $x \in [0,1)$, atunci $x^n \to 0$ şi deci $\lim_n S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$; c) $\frac{2}{3}$; $1 - x = t$; **III.** a) $\det X(a) = 1 + a$; b) Prin calcul; altfel $X(a) = I_3 + a\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$; d) $X^2(1) = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 16 & 30 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$; **IV.** a) Se aplică l'Hospital; $\frac{1}{24}$; b) $f'(x) = x - \sin x$, $f''(x) = -\cos x + 1$; c) $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'$ este crescătoare. Din $f'(x) = 0$ şi f' crescătoare se deduce $f(x) < 0$, $\forall x < 0$ şi $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$; e) $A = \int_0^1 \cos x dx$; Din $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $f \neq 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 (\cos x - 1 + \frac{x^2}{2})dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \cos x dx > \int_0^1 (1 - \frac{x^2}{2})dx \Leftrightarrow A > \frac{5}{6}$. **12. I. 1.** a) $f(-1) = 0$; b) $q = X^2 + 5X + 6, r = 0$; c) $x \in \{-1, -2, -3\}$; **2.** $2^n = 4 \Rightarrow n = 2$; **3.** a) $AB = 10$, $AC = 8$, $BC = 6$; b) $AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow$ triunghi dreptunghic în C; c) Centrul cercului este mijlocul ipotenuzei $[AB]$, adică $O(0,0)$ iar $r = \frac{AB}{2} = 5$; $x^2 + y^2 - 25 = 0$; **II. 1.** b) $e = \frac{5}{4}$; c) $\forall x, y > 1 \Rightarrow x * y > 1 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0$; **2.** a) $g'(x) = 4 + \frac{1}{(1-x)^2}$, $\forall x \neq 1$; b) $y = 4x - 1$; c) 5; **III. 1.** Se scade coloana întâi din celelalte şi se dă factor comun pe coloanele a doua şi a treia; **2.** c) Se dezvoltă Δ după ultima linie şi se împarte cu $(b-a)(c-a)(c-b)$ şi utilizăm a); **IV.** a) $I_0 = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{1}{2}$; $I_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$; b) $4I_n + I_{n+2} = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$; d) Se integrează dubla inegalitate de la c) $\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. De aici, via criteriul "cleştelui", se deduce $\lim_n I_n = 0$.

13. I. 1. a) Calcul direct; b) Din a) $\Rightarrow \sum(x-y)^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0$,

$y-z=0$, $z-x=0$; c) $(2^x-3^x)^2+(3^x-5^x)^2+(5^x-2^x)^2=0$. Din b) $\Rightarrow 2^x=3^x=5^x \Rightarrow x=0$; **2.** a) $f'(x)=-xe^{-x}$; b) $f'(x)>0$ dacă $x<0$; $f'(x)<0$ dacă $x>0$; $f'(x)=0$ dacă $x=0$; c) $x_0=0$ punct de maxim pentru f şi deci $f(x)\leq f(0)=1$; e) Prin părţi; $2-\frac{3}{e}$; **3.** a) 2; b) $R=2$ (de la a)); c) $12x-5y-7=0$; **II. 1.** a) $f(\hat{a})=\widehat{(a-1)a(a+1)}=\hat{0}$ (produsul a trei numere întregi consecutive se divide prin 3, iar produsul a două numere întregi consecutive se divide prin 2 şi deci $(a-1)a(a+1)$ se divide prin 6); b) $g=\hat{2}f$ are gradul trei şi şase rădăcini; c) $S_1=\hat{3}$, $S_2=\hat{1}$; d) $\hat{a}^3=\hat{a}$, $a\in\overline{1,5}$; Prin inducţie se arată că $S_k=S_1$ pentru k impar şi $S_k=S_2$ pentru k par; **2.** b) $F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+k$, $k\in\mathbb{R}$; c) 2; **III.** a) $(a_1a_2a_3, a_1a_2x_3+a_1x_2+x_1)$; d) $(2,1)$, $(1,2)$; e) $(u^n, v(u^{n-1}+u^{n-2}+\ldots+u+1))=(a,x)\Rightarrow u^n=a$ şi $v(u^{n-1}+\ldots+u+1)=x\Rightarrow u=\sqrt[n]{a}$, etc.; **IV.** a) F este derivabilă şi $F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$; c) Din $F'(x)\geq 0\Rightarrow F$ este crescătoare. Funcţia F are ca perioadă numărul $T=2\pi$ şi deci F este constantă. d) Din b) şi c) $\Rightarrow F(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; e) Calcul direct; f) Se utilizează c) şi d).

14. I. 1. a) $m(\sigma)=4$; b) $\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix}$; c) $x=\tau^{-1}\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}$; **2.** b) Se scrie fiecare termen din a_n după relaţia din a) şi se însumează; c) 1; d) (1^∞); $\frac{1}{e}$; **3.** a) $A_0(0,2)$, $A_1(2,5)$; $3x-2y+4=0$; b) Coordonatele lui A_n verifică ecuaţia dreptei de la a); c) $A_nA_{n+1}=\sqrt{13}$; **II. 1.** a) $a^3-a=(a-1)a(a+1)\vdots 3$, $\forall a\in\mathbb{Z}$ şi deci $\hat{a}^3=\hat{a}$, $\forall\hat{a}\in\mathbb{Z}_3$; b) $(f(X))^3=\hat{a}^3X^3+3\hat{a}^2\hat{b}X^2+3\hat{a}\hat{b}^2X+\hat{b}^3\overset{a)}{=}\hat{a}X^3+\hat{b}=f(X^3)$; **2.** a) $f'(x)=\frac{-4(x+1)}{(x^2+4x+5)(x^2+1)}$; b) Dacă $x<-1$, atunci $f'(x)>0$ (adică $f\nearrow$), iar pentru $x>-1$ avem $f'(x)<0$ (adică $f\searrow$) şi $f'(-1)=0$; c) $y=0$ a.o. la $\pm\infty$; d) $3\text{arctg}3-2\text{arctg}2-\frac{\pi}{4}$; **III.** a) $\det(A)=0$, $\text{rang}(A)=2$; b) $(\lambda,-2\lambda,\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$; c) Se ia $B=\begin{pmatrix}x&x&x\\y&y&y\\z&z&z\end{pmatrix}$. Din $AB=O_3$ rezultă sistemul. Pentru $\lambda=1$ avem: $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$; d) $\det(A^n)=(\det(A))^n=0$ şi $\det(I_3)=1\Rightarrow A^n\neq I_3$; e) $\det(A+\frac{1}{n}I_3)=\frac{1}{n^3}+\frac{9}{n^2}+\frac{7}{n}>0$; **IV.** a) $f'(x)=ax^{a-1}$; b) Se aplică Lagrange pe $[2,3]$ şi $[4,5]$; c) Din relaţie rezultă $x=0$ sau $\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)^{x-1}=0$; din $\frac{g(x)}{h(x)}<1$ şi ultima egalitate rezultă $x-1=0$; d) Se aduce ecuaţia la forma $3^a-2^a=5^a-4^a$ şi se aplică b); Avem $a\in\{0,1\}$; e) Se consideră funcţia ajutătoare $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i(x)=3^x+4^x-2^x-5^x$ şi se studiază semnul acesteia; se obţine că dacă $x\in(0,1)$, atunci $i(x)>0$; f)

din $3^x + 4^x \geq 2^x + 5^x$, $\forall x \in [0,1]$, prin integrare pe $[0,1]$ rezultă inegalitatea $\frac{2}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 4} \geq \frac{1}{\ln 2} + \frac{4}{\ln 5}$. Se arată, prin reducere la absurd, că semnul egal nu poate avea loc (utilizând rezultatul: f continuă pe $[a,b]$, $f \geq 0$ şi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f = 0$). **15. I. 1.** a) Se dezvoltă d după prima linie; b) Se adună liniile doi şi trei la prima; c) Prin calcul direct; d) $a = 2^x$, $b = 3^x$, $c = 5^x$ şi ecuaţia este $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$ (punctele a), b), c))$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow x = 0$; **2.** a) $\frac{\pi}{2}$; b) 0; c) Din b)$\Rightarrow f(x) = k = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; **3.** a) $y - x = 0$; b) $m_{BC} = -\frac{1}{2}$; c) $AB = \sqrt{2}$, $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{5}$; $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$; **II. 1.** a) $a_{n+1} - a_n = 2$ =constant; $r = 2$; b) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$; $n = 2001$; c) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 4$; $q = 4$; d) $a_n < b_n \Leftrightarrow 2n - 1 < 2^{2n-1}$; **2.** a) $(k+1)! - k! = k!(k+1) - k! = k!(k+1-1) = k!k$; b) Se scrie fiecare termen al sumei cu ajutorul lui a) şi se însumează relaţiile astfel obţinute; c) $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$; 1; d) $\frac{1}{e}$; **III.** a)-c) Prin calcul direct; e) Membrul stâng al ecuaţiei este $2^{15}(x-1)^{16} + 1$; 1; **IV.** a) $f'(x) = \frac{x-e}{x}$; b) Pe $(-\infty, e]$, f este descrescătoare, iar pe $[e, \infty)$, f este crescătoare; c) $x = e$ este punct de minim pentru f şi deci $f(x) \geq f(e) = 0$; d) Dacă $x > e \Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x > e\ln x \Leftrightarrow \ln e^x > \ln x^e \Leftrightarrow e^x > x^e$; e) Se consideră funcţia $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1}$ şi din d) $\Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g(x) > \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

16. I. 1. a) $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_0 = f(x_0) = m - 1$; b) $m - 1 \geq 2 \Rightarrow m \geq 3$; c) $(x-1)^2 = 1 \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$; **2.** a) Prin calcul direct; b) Se utilizează a) pentru fiecare termen al şirului şi se însumează; c) 1; d) $\frac{1}{e}$; **3.** a) $x + y - 4 = 0$; b) $m_{AB} = \frac{1}{2}$; c) $AB = \sqrt{5}$, $AC = 3$, $BC = 2\sqrt{2}$; $3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$; **II. 1.** a) $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$; b) Fie $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\overline{f}(x) = x^3 - 3x + 1$. Utilizăm pentru funcţia continuă $\overline{f}$ proprietatea lui Darboux. Din $f(-2)f(0) = -1 < 0$ se deduce existenţa unei soluţii a ecuaţiei $\overline{f}(x) = 0$ între -2 şi 0, etc; c) Polinomul nu admite rădăcini întregi sau raţionale; **2.** a) $f'(x) = 2^x \ln 2 - a$; b) $f(0) = 0$, $f'(0) = \ln 2 - a$; c) $f(x) \geq 0 = f(0) \Rightarrow x = 0$ punct de minim. Conform teoremei lui Fermat $f'(0) = 0 \Rightarrow a = \ln 2$; d) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \geq x\ln 2 + 1$. Punând aici în locul lui x, x^2 rezultă $2^{x^2} \geq x^2 \ln 2 + 1$, care se integrează; **III.** a) $\det(A) = 0$, $\mathrm{rang}(A) = 1$; b) $A^2 = A$; c) $I_2 = X(0) \in G$; e) Se demonstrează inductiv relaţia $\prod\limits_{k=1}^{n} X(k) = X((n+1)! - 1)$; **IV.** a) $I_0 = \frac{1}{2}\ln 3$, $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\ln 3$; b) $2I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{x^n(2x+3)}{2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$; c) Din $x \leq 1$ prin înmulţire

cu x^n (≥ 0) rezultă $x^{n+1} \leq x^n$; d) Din c) $\Rightarrow I_n \geq I_{n+1}$; e) Utilizând d) $\Rightarrow \frac{1}{n+1} = 2I_{n+1} + 3I_n \leq 2I_n + 3I_n = 5I_n$, iar din $\frac{1}{n+1} \geq 2I_{n+1} + 3I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} \leq \frac{1}{5(n+1)}$; f) Înmulţim cu n inegalităţile de la e); $\frac{1}{5}$. **17. I.1.** b) $(x+1)^4 = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \pm 1 \Rightarrow x \in \{-1 \pm i, 0, -2\}$; b) 0; c) $\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$; 3. a) $x + y = 0$; b) $\sqrt{2}$; c) $n + (-n) = 0$; **II.** 1. a) $\det(A) = 0$; $\operatorname{rang}(A) = 2$; b) $(\lambda, 2\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$; c) $\lambda = 1; (1, 2, 1)$; 2. a) $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$; b) $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)^2} > 0$; d) $b_n \searrow \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow a_n + \frac{1}{n} > \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow a_n - \frac{\pi^2}{6} > -\frac{1}{n}$; $c_n \nearrow \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow a_n + \frac{1}{n+1} < \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow a_n - \frac{\pi^2}{6} < -\frac{1}{n+1}$ şi deci $-\frac{1}{n} < a_n - \frac{\pi^2}{6} < -\frac{1}{n+1} \Rightarrow -1 < n\left(a_n - \frac{\pi^2}{6}\right) < -\frac{n}{n+1}$; -1; **III.** c) $x \in H_n, x = \frac{k}{n!}$; $n < p$, $x = \frac{k(n+1)(n+2)\ldots p}{p!} \in H_p \Rightarrow H_n \subset H_p$; d) $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$; $r = \frac{p(q-1)!}{q!} \in H_q$; e) $\frac{1}{n!} \in G$, $(G, +)$ subgrup $\Rightarrow \frac{k}{n!} \in G$, $\forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow H_n \subset G$;

f) Prin reducere la absurd. Presupunem că $\forall i = \overline{1, 2002}$, $\exists r_i \in \mathbb{Q}$, $r_i \in G_i$. Conform cu d) $r_i \notin H_{n_i}$. Fie $m = \max n_i$. Conform cu c) $r_1, r_2, \ldots, r_{2002} \in H_m$ şi deci $\exists k \in \overline{1, 2002}$ a.î. $\frac{1}{m!} \in G_i$. Din e) $\Rightarrow H_m \subset G_k$, contradicţie ($r_k \in H_m$, $r_k \in G_k$).

IV. a) $F' = f$; c) $f(x) = F'(x) \geq 0 \Rightarrow F$ crescătoare şi F este periodică din b) $\Rightarrow F$ constantă; d) $F' = 0 = f$; f) Conform cu c) $F=$ constantă, iar din d) $f = 0$. Deci $\sum_{p=1}^{n} a_p \sin px = 0$. Se înmulţeşte egalitatea cu $\sin qx, q$ fixat şi se integrează pe $[0, 2\pi]$. Se utilizează e) şi rezultă $a_p S(q, p) = 0$, adică $a_p = 0$; **18. I.** 1. b) $e = -2$; d) Se aplică c); $n = 6$; 2. a) $f''(x) = 4x(2x^2 + 3)e^{x^2}$; pe $(-\infty, 0) f$ concavă; pe $(0, \infty) f$ convexă; c) 1; 3 a) $2x - 3y = 0$; b) $\sqrt{13}$; c) $2 \cdot 3n - 3 \cdot 2n = 0 \Rightarrow A_n \in A_0A_1$; **II.** 1. a) $e^2 = e \Rightarrow e \in H$; b) $\sigma^2 = \tau^2 = e \Rightarrow \sigma, \tau \in H$; c) $(\sigma\tau)^2 \neq e \Rightarrow \sigma\tau \notin H$. 2. a) $\cos(x + 2k\pi) = \cos c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $f(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$; se face aici $x = 0, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2}$ şi rezultă $k = 0$, $a = b = c = 0$; **III.** a) $f = g(X - 1)$; $q = X - 1$, $r = 0$; b) Verificare prin calcul; c) din b) $\Rightarrow x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1 = 0$, $x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1 = 0$ care nu au rădăcini raţionale şi deci g nu are factori de gradul doi în $\mathbb{Q}[X]$. Nici factori de gradul întâi nu are pentru că rădăcinile raţionale ar putea fi ± 1 care însă nu verifică $g(\pm 1) = 0$. Deci g este inductibil în $\mathbb{Q}[X]$. d) f are unica rădăcină reală $x = 1$. Dacă f şi h au divizor de gradul întâi acesta este $X - 1$. Dacă $(f, h) = 2 \Rightarrow (f, h) = h$ şi deci $h|f \Rightarrow h|(X-1)g \Rightarrow h|g$

fals (din c); f) Din $A^5 = I_2$ rezultă det (A^5) =det $(I_2) = 1$. Conform cu a), $A^2 - (r+u)A + I_2 = O_2$; fie $h = X^2 - (r+u)X + 1$. Deci $h(A) = O_2$ şi $f(A) = I_2$. Teorema împărţirii cu rest $f = hq + r$, grad$(r) \leq 1$, $q, r \in \mathbb{Q}[X]$; din d), $h \nmid f$ şi deci $r \neq 0$, adică grad$(r) = 1$. Avem $f(A) = h(A)q(A) + r(A)$; dar $f(A) = h(A) = O_2$ şi deci $r(A) = O_2$, ceea ce dă $A = kI_2$, $k \in \mathbb{Q}$. De aici $A^5 = k^5 I_2$. Cum $A^5 = I_2$, deducem $A = I_2$; **IV.** b) $a = -x^2$ în a); d) metoda "cleştelui" e) $\frac{\pi}{4}$; **19. I.** 1. a) $f = (X-1)(X^2+X+6)$; b) $1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; c) $(-\infty, 1]$; 2. b) $f'(0) = 2$; c) $F'(x) = f(x)$. $\forall x$; d) $F(x)\Big|_0^{2\pi} = 0$; 3. a) $\sqrt{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $m_{AB} = -1$; $x + y - 3 = 0$; **II.** 1. b) $4^x + 2^x - 6 = 0$, $2^x = y > 0$; 1; c) $a = \frac{1}{2}$, $a \circ b = 10 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$; d) $1, -2$; 2. a) $f(x) = \frac{(x^2+1)+3}{x^2+1} = 1 + \frac{3}{x^2+1}$; b) $1 + \frac{3\pi}{4}$; c) $\lim\limits_{n \to \pm\infty} f(x) = 1$; $y = 1$ a.o. la $\pm\infty$; **III.** a) $AI_2 = I_2 A \Rightarrow I_2 \in G$; $A \cdot A = AA = A^2 \Rightarrow A \in G$; d) $A^2 X = (-I_2)X = X(-I_2) = XA^2$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; e) $AB = BA \Rightarrow B \in G$; **IV.** b) $f(a) = 0$, $f'(a) = \ln a - 1$; c) $f(x) \geq 0 = f(a)$, $\forall x > 0 \Rightarrow x = a$ punct de minim interior lui $(0, \infty) \Rightarrow f'(a) = 0 \Rightarrow a = e$; d) $e^x > x^e \Leftrightarrow x > e \ln x$; se ia funcţia $g(x) = x - \ln x$ şi se obţine că $x = e$ este punct de minim; e) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ şi deci $e^x = x^e \Leftrightarrow x = e$; f) Pentru $x = e$ inegalitatea este $c^e + b^e \geq e^c + e^b$. Cum $e^c \geq c^e$ (din d)) şi $e^b \geq b^e \Rightarrow c^e + b^e \geq e^c + e^b \geq c^e + b^e$. Deci $e^c = c^e$ şi $e^b = b^e \Leftrightarrow b = c = e$.

CUPRINS

I. PRIMITIVE 3
1.1. Noţiuni preliminarii 3
1.2. Introducerea noţiunii de integrală. Exprimarea ariei printr-o integrală 4
1.3. Primitiva unei funcţii. Integrala nedefinită a unei funcţii continue 8
1.4. Proprietăţi generale 11
1.5. Metode de calcul al primitivelor 39
II. INTEGRALE DEFINITE 136
2.1. Calculul integralei Riemann pentru funcţii continue cu ajutorul formulei Leibniz-Newton 136
2.2. Proprietăţile integralei definite 156
2.3. Metode de calcul ale integralelor definite 179
III. TEOREMA FUNDAMENTALĂ (facultativ) 216
IV. APLICAŢII ALE INTEGRALEI DEFINITE 228
4.1. Aplicaţii în geometria plană 228
4.2. Aplicaţii în geometria în spaţiu 240
4.3. Centre de greutate 245
V. ECUAŢII DIFERENŢIALE 289
5.1. Introducere 289
5.2. Soluţiile ecuaţiilor diferenţiale 290
5.3. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi 291
VI. PROBLEME RECAPITULATIVE 311

Am folosit manualele aceluiaşi autor la clasele IX-XI din dorința de a exista o continuitate în activitatea de predare. Sunt bine structurate, conțin exerciții şi probleme suficiente, fără a mai fi nevoie de folosirea altor culegeri de probleme.

Catedra de Matematică
Colegiul Național "Ienăchiță Văcărescu", Târgoviște

Manualele s-au bucurat de o primire foarte bună, în special din partea elevilor care au avut în ele modele de rezolvare pe care să se sprijine în rezolvarea problemelor propuse. Manualele impresionează prin claritatea ideilor exprimate, ceea ce face ca noțiuni dificile să poată fi uşor înțelese de elevi.

Catedra de Matematică
Grupul Şcolar Industrial Energetic, Constanța

ISBN 973 - 85055 - 9 - 3
ISBN 973 - 8222 - 00 - 1